Beispiellösungen zu Blatt 91

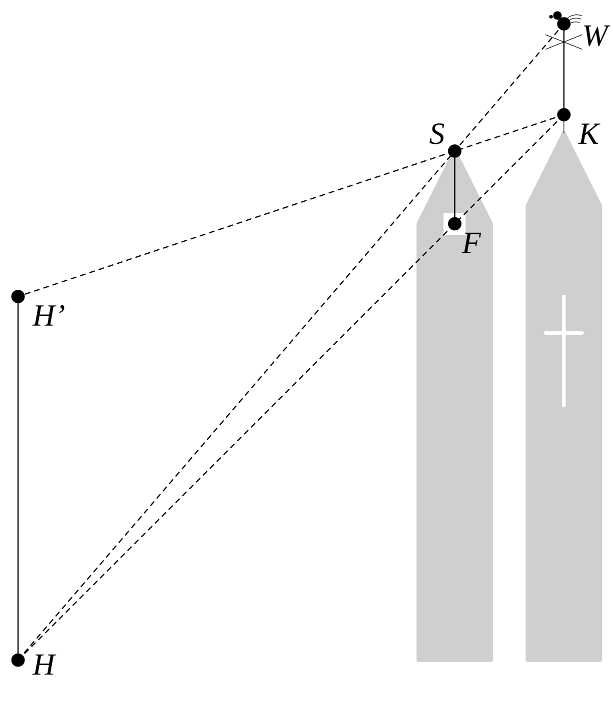
Aufgabe 1

Heiner sieht von der Anlegestelle seines Elbkutters aus, wenn er mitten auf Deck steht, normalerweise die Spitze des Rathausturms und den Wetterhahn auf der Kirchturmspitze genau in einer Linie. Das Hochwasser hat den Wasserstand nun ansteigen lassen; jetzt sieht Heiner die Rathausturmspitze genau vor der goldenen Kugel auf dem Kirchturm, die exakt einen Meter unter dem Wetterhahn angebracht ist. Diese Kugel kann Heiner wiederum normalerweise durch ein kleines Fenster sehen, das 80 cm unterhalb der Spitze des Rathausturms ist.
Wie stark ist der Fluss angestiegen?

Lösung:

Bei normalem Wasserstand entsprechen die Strecken HW (Heiner – Wetterhahn) und HK (Heiner – goldene Kugel) Heiners Sichtlinien. Da die beiden Türme nicht als schief angenommen wurden, sind die Strecken SF (Spitze des Rathausturms – Fenster) und WK parallel zueinander und der Strahlensatz darf angewendet werden:

$$\frac{|HW|}{|HS|} = \frac{|WK|}{|SF|} = \frac{1\,\mathrm{m}}{0{,}8\,\mathrm{m}} .$$



Davon ausgehend, dass das Hochwasser Heiners Position nur nach oben verschoben hat, betrachten wir nun die „Hochwassersichtlinie“ $H'K$ und wenden erneut den Strahlensatz auf die sich in S kreuzenden Strecken HW und $H'K$ an:

$$\frac{|HS|}{|SW|} = \frac{x\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}},$$

dabei sei $x\,\mathrm{m} = |HH'|$ der gesuchte Anstieg des Wasserspiegels.
Bilden wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung Kehrwerte und benutzen $|HW| = |HS| + |SW|$ in der ersten Gleichung, erhalten wir

$$1 + \frac{|SW|}{|HS|} = \frac{|HS| + |SW|}{|HS|} = \frac{1\,\mathrm{m}}{0{,}8\,\mathrm{m}} \quad \text{und} \tag{1}$$

$$\frac{|SW|}{|HS|} = \frac{1\,\mathrm{m}}{x\,\mathrm{m}}. \tag{2}$$

Einsetzen von (2) in (1) liefert $\frac{1}{x} = \frac{1}{0{,}8} - 1 = \frac{1}{4}$ und somit $x = 4$.
Der Wasserstand ist also um 4 Meter höher als normal.

Aufgabe 2

Finde alle sechsstelligen Palindromzahlen (also Zahlen der Form $abccba$), die durch 91 teilbar sind!

Lösung:

Es ist $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 91$, sodass die Zahl $abcabc = 1001 \cdot abc$ in jedem Fall durch 91 teilbar ist. Vergleichen wir unser sechsstelliges Palindrom $abccba$ damit, so erhalten wir

$$\begin{aligned} abccba &= abcabc + 100(c-a) + 1(a-c) \\ &= 99(c-a) + 91 \cdot 11 \cdot abc\,. \end{aligned}$$

Also ist $abccba$ genau dann durch 91 teilbar, wenn $99(c-a)$ durch 91 teilbar ist. Da $99 = 9 \cdot 11$ und $91 = 7 \cdot 13$ teilerfremd sind, ist dies genau dann der Fall, wenn 91 ein Teiler von $(c-a)$ ist. Weil c und a Ziffern sind, folgt, dass $abccba$ genau dann durch 91 teilbar ist, wenn $c - a = 0$, also $c = a$ gilt. Somit sind genau die 90 sechsstelligen Palindrome der Form $abaaba$ durch 91 teilbar.

Bemerkung: Die obige Zerlegung $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ergibt die – nicht so bekannten – Teilbarkeitsregeln für 7 und 13. Eine Zahl ist genau dann durch 7 bzw. durch 13 teilbar, wenn die alternierende Dreierquersumme (fasse von hinten je drei Ziffern zu einer dreistelligen Zahl zusammen und addiere bzw. subtrahiere diese abwechselnd) durch 7 bzw. 13 teilbar ist.

Aufgabe 3

In einem Museum sind 91 wertvolle Elfenbeinkugeln zu einer quadratischen, sechsetagigen Pyramide aufgestapelt. Für Diebe, die eine dieser Kugeln durch

ein billiges Imitat ersetzen wollen, hat eine Kugel aus sportlicher Sicht einen Wert, der gleich der Anzahl an Kugeln ist, die weggeräumt werden müssen, bevor man an die gewünschte Kugel herankommt. Beispielsweise haben die Kugeln in der dritten Etage die Werte 2 oder 3 oder 5.
Welche Zahl erhält man, wenn man die Werte für alle Kugeln aufaddiert?

Lösung:

Die gesuchte Summe aller sportlichen Elfenbeinkugelwerte beträgt 875.

Für jede Kugel ist zu zählen, wie viele andere Kugeln weggeräumt werden müssen. Da uns aber nur die Summe dieser Anzahlen interessiert, können wir auch andersherum vorgehen und für jede Kugel zählen, wie oft wir sie wegnehmen müssen, um andere Kugeln freizuräumen. Auch diese Anzahlen addieren wir am Schluss.
Und zwar muss eine Kugel A genau für diejenigen anderen Kugeln weggeräumt werden, die in der „Unterpyramide“ liegen, deren Spitze A ist.
In der n-ten Etage liegen genau n^2 Kugeln, eine Pyramide mit n Etagen besteht folglich aus $y(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ Kugeln und die Kugel an der Spitze muss also $z(n) = y(n) - 1$ Mal aus dem Weg geräumt werden. Wobei in unserer Pyramide mit 6 Etagen die Kugeln in der n-ten Etage (für $n \leq 6$) dann jeweils an der Spitze einer Pyramide aus $7 - n$ Etagen liegen, also $x(n) = z(7 - n)$ Mal weggeräumt werden müssen.

n	n^2	$z(n)$	$x(n)$	$n^2 \cdot x(n)$
1	1	0	90	90
2	4	4	54	216
3	9	13	29	261
4	16	29	13	208
5	25	54	4	100
6	36	90	0	0

Die gesuchte Zahl berechnet sich dann als Summe aus den Produkten $n^2 \cdot x(n)$ zu $90 + 216 + 261 + 208 + 100 + 0 = 875$.

Aufgabe 4

Auf einem $n \times n$-Schachbrett steht zu Anfang links unten ein Springer. Immer wenn der Springer ein Feld verlässt, werden alle Felder in dessen Zeile und Spalte für weitere Züge gesperrt.
Finde alle n, für die der Springer $n - 1$ Züge machen kann, bevor er bewegungsunfähig wird.

Lösung:

Der erste Sprung des Springers kann vom Feld $(1; 1)$ auf das Feld $(2; 3)$ oder auf $(3; 2)$ gehen – weil die Situation symmetrisch ist, können wir uns frei für das Feld $(2; 3)$ entscheiden.

Wenn es einen Weg des Springers mit $n-1$ Zügen gibt, heißt das offenbar, dass der Springer jede Zeile und Spalte genau einmal getroffen hat.
Wir fangen mit einer allgemeinen Beobachtung an: Bei jedem Zug des Springers bewegt er sich in eine der beiden Richtungen nur um ein Feld. Es werden damit also zwei benachbarte Zeilen oder Spalten gesperrt. Da der Springer aber keine zwei Zeilen oder Spalten auf einmal überspringen kann, dürfen in der Richtung, in der sich der Springer nur um ein Feld bewegt, nur noch auf einer Seite dieser Doppelreihe noch ungesperrte, also noch unbesuchte Reihen sein.
Nehmen wir einmal an, dass zu Beginn des Springerweges mehr als ein Zug steht, bei dem die 2er-Veränderung in y-Richtung ist. Dann ist klar, dass alle diese Züge sogar in genau dieselbe Richtung gehen. Betrachten wir nun den ersten Zug in eine andere Richtung; dabei muss sich der Springer zwei Spalten nach rechts bewegen. Der Zug sorgt für zwei benachbarte gesperrte Zeilen, zu denen aber nicht die zweite Zeile gehört. Daher müssen die beiden benachbarten gesperrten Zeilen am oberen Rand liegen. Weil ansonsten nur noch jede zweite Zeile frei ist, müssen diese Zeilen wiederum durch Züge verbunden werden, die in y-Richtung zwei Felder zurücklegen. Dabei werden von jedem Zug jeweils zwei benachbarte Spalten getroffen, deswegen müssen auch diese Züge immer in dieselbe Richtung zeigen.
Der erste Zug, der zwei Spalten nach rechts geht, überspringt jedoch eine Spalte, die dann als einzige Spalte links von der aktuellen Spalte frei ist. Ginge der nächste Zug, der ja wieder zwei Felder in y-Richtung zurücklegen muss, nach rechts, so wäre diese Spalte unerreichbar. Also muss dieser Zug nach links unten gehen, gleichzeitig ist dies aber der letzte Zug. Somit muss er in die zweite Zeile führen.
Es gibt also nur eine Möglichkeit, eine Lösung zu erhalten, bei der vom Startfeld aus zwei Züge gemacht werden, die in y-Richtung zwei Felder zurücklegen, nämlich für $n=5$:

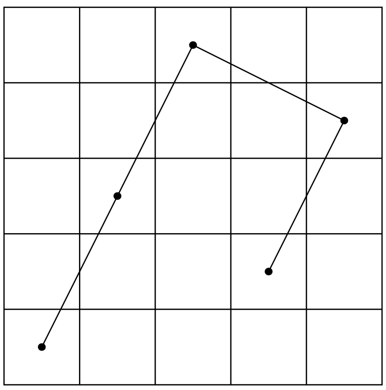


Abbildung 1: Eine Lösung für $n=5$

Nun betrachten wir alle anderen Fälle. Nach wie vor sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit festgelegt, dass der erste Zug von $(1;1)$ nach $(2;3)$ führt. Weil die zweite Zeile noch nicht erreicht wurde, muss mindestens ein weiterer Zug folgen. Dieser muss in allen noch nicht bearbeiteten Fällen zwei Felder nach rechts gehen.

Geht der zweite Zug nach $(4;4)$, so ist die zweite Zeile nach wie vor unerreicht. Da aber die Zeilen 3 und 4 bereits erreicht wurden, muss der dritte und letzte Zug zum Feld $(3;2)$ führen und es muss $n = 4$ sein.

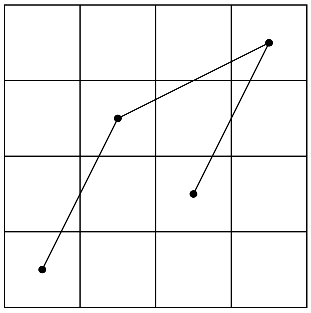


Abbildung 2: Eine Lösung für $n = 4$

Geht der zweite Zug aber nach $(4;2)$, so ist die dritte Spalte noch unerreicht, es kann also ebenfalls noch kein Ende erreicht sein. Der dritte Zug muss in die vierte Zeile führen. Führt er nach $(5;4)$, muss weiterhin die dritte Spalte bedacht werden, somit geht dann der vierte Zug nach $(3;5)$, gleichzeitig ist damit Schluss.

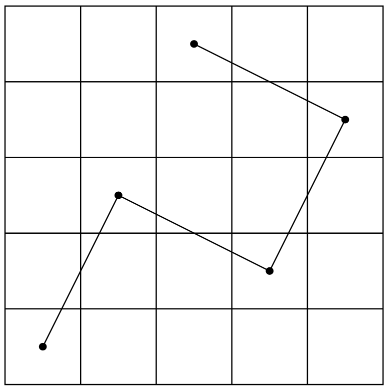


Abbildung 3: Eine weitere Lösung für $n = 5$

Geht schließlich der dritte Zug zum Feld $(3;4)$, kann die Zugfolge enden, womit eine weitere Lösung für den Fall $n = 4$ gefunden wurde.

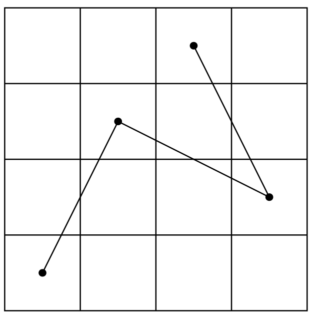


Abbildung 4: Eine weitere Lösung für $n = 4$

Soll es weitergehen, muss der vierte Zug nach $(5;5)$ führen. Hier kann man nun die bereits erreichten vier ersten Zeilen und Spalten ignorieren und so tun, als habe man ein $(n-4) \times (n-4)$-Schachbrett.

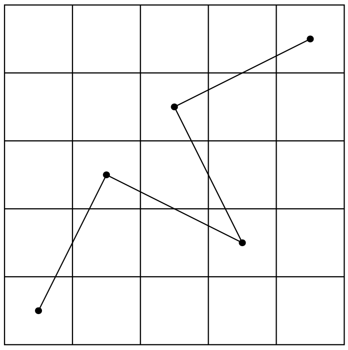


Abbildung 5: Eine Lösung für $n = 5$, die man noch fortsetzen kann

Für $n \leq 4$ ist also genau für $n = 1$ (trivialerweise) und $n = 4$ eine gewünschte Zugfolge möglich. Durch Fortsetzen der Argumentation erhält man, dass eine solche Zugfolge genau für alle n möglich ist, für die n beim Teilen durch 4 den Rest 0 oder 1 lässt.

Zweite Lösung

Hier zeigen wir zuerst, dass ein gesuchter Springerweg für alle n, die durch 4 teilbar sind oder beim Teilen durch 4 Rest 1 lassen, existiert. Dies ist sofort einzusehen, indem man für $n = 4k$ oder $n = 4k + 1$ mit $k \geq 1$ zunächst eine Zugfolge wie in Abbildung 5 der ersten Lösung $k - 1$ Mal wiederholt. Am Ende kann dann je nach Bedarf eine der in der ersten Lösung abgebildeten Zugfolgen stehen. Für $n = 1$ führt man einfach keinen Zug aus und hat eine Lösung.

Dass für alle anderen n kein solcher Weg existiert, ergibt sich aus den folgenden Überlegungen:

Wir betrachten die Koordinaten der Felder, auf denen der Springer steht. Zu Beginn steht er auf dem Feld $(1; 1)$, also sind beide Koordinaten ungerade. Bei jedem Zug bewegt sich der Springer in eine Richtung um 2 Felder, in die andere Richtung um 1 Feld. Daher ist von seinen Koordinaten am zweiten Standort eine gerade und eine ungerade. Am dritten Standort sind entsprechend beide Koordinaten gerade oder beide ungerade. Das geht natürlich immer so weiter: Genau nach jedem zweiten Zug liegen Koordinaten vor, die beim Teilen durch 2 nicht denselben Rest lassen.

Wenn es auf einem $n \times n$-Feld einen Springerweg mit $n - 1$ Zügen gibt, muss jeder der Koordinatenwerte 1 bis n in x- wie in y-Richtung genau einmal auftauchen. Insbesondere müssen gleich viele gerade Koordinatenwerte in beiden Richtungen existieren.

Genau an jedem zweiten Standort, beginnend mit Standort Nummer 2, wird aber die Anzahl der erreichten geraden Koordinatenwerte genau für eine der beiden Koordinatenrichtungen erhöht. (Sonst für beide oder keinen.) Daher muss es eine gerade Anzahl solcher Situationen geben. Das wiederum bedeutet, dass es eine gerade Anzahl von geraden Standortnummern geben muss. Die Anzahl aller Standortnummern ist n, und die größte gerade Standortnummer muss somit durch 4 teilbar sein. Daher kann n bei Division durch 4 nicht den Rest 2 oder 3 haben.