Beispiellösungen zu Blatt 57

Aufgabe 1

Bei einem Mathewettkampf sendet jede teilnehmende Schule ein Team bestehend aus fünf Schülern. Die Teilnehmer der Gaußschule sind Stefan, Stefanie, Steffen, Steven und Carl-Friedrich.
Nach dem Wettkampf vergleichen die fünf ihre Ergebnisse. Es stellt sich heraus, dass Stefanie das beste Ergebnis ihrer Schule erreichte und in der Ergebnisliste aller Teilnehmer genau in der Mitte steht. Auch Steffen ist mit seinem 48. Platz in der Gesamtliste sehr zufrieden. Nur Carl-Friedrich, der auf Platz 76 gelandet ist, muss etwas getröstet werden.
Wie viele Schulen nahmen am Wettkampf teil?

Lösung:

Zunächst bemerken wir, dass die Anzahl der Teilnehmer durch 5 teilbar sein muss, weil jede Schule ein Team aus fünf Schülern sendet. Außerdem muss sie ungerade sein, da es sonst nicht möglich wäre, dass es genauso viele bessere wie schlechtere Schüler als Stefanie gibt. Weil Steffen schlechter ist als Stefanie, befindet sich Stefanie schlechtestenfalls auf Platz 47. Daher ist die Teilnehmeranzahl kleiner oder gleich $47 + 46 = 93$. Da Carl-Friedrich auf dem 76. Platz ist, gibt es andererseits mindestens 76 Teilnehmer. Das einzige ungerade Vielfache von 5 zwischen 76 und 93 ist 85. Die Teilnehmeranzahl muss also 85 betragen. Damit haben $\frac{85}{5} = 17$ Schulen teilgenommen.

Aufgabe 2

Finde alle zehnstelligen Zahlen, in denen jede Ziffer von 0 bis 9 genau einmal vorkommt und bei denen für alle $k = 1, 2, 3, \ldots, 10$ die Zahl, die aus den ersten k Ziffern (von links gezählt) gebildet wird, durch k teilbar ist.

Lösung:

Es gibt genau eine Zahl, die die Anforderungen erfüllt, nämlich 3816547290.

Sei a eine Zahl, die die Anforderungen erfüllt. Mit a_i bezeichnen wir die Zahl, die aus den ersten i Ziffern von a gebildet wird. z_i bezeichne die i-te Ziffer von a.
Der Anfang des Beweises ist einfach: Da a durch 10 teilbar sein soll, muss die letzte Ziffer, z_{10}, die 0 sein. a_5 muss durch 5 teilbar sein; da die Null schon vergeben ist, ist $z_5 = 5$.
Weil a_2, a_4, a_6 und a_8 jeweils durch eine gerade Zahl teilbar sein sollen, aber nur noch vier gerade Ziffern (2, 4, 6 und 8) zur Verfügung stehen, verteilen sich diese auf die zweite, vierte, sechste und achte Ziffer von a. Die erste, dritte, siebte und neunte Ziffer sind daher – in noch unbekannter Reihenfolge – die Ziffern 1, 3, 7 und 9.

Weiter geht es mit der Betrachtung von a_4 und a_8, die beide durch (mindestens) 4 teilbar sein sollen. Nach dem bekannten Teilbarkeitskriterium sind dafür jeweils die letzten beiden Ziffern zu betrachten. Die jeweils vorletzte Ziffer ist, wie wir bereits wissen, ungerade. Ein ungerades Vielfaches von 10 ist nicht durch 4 teilbar, deswegen darf die jeweils letzte Ziffer ebenso nicht durch 4 teilbar sein, damit die letzten beiden Ziffern insgesamt durch 4 teilbar sind. (Das kann man auch an den Zahlen direkt überprüfen.) Also sind z_4 und z_8 die Ziffern 2 und 6, womit z_2 und z_6 die Ziffern 4 und 8 sein müssen.
Nun machen wir uns Teilbarkeiten durch 3 zunutze, das betrifft zunächst a_3 und a_6. (Die Teilbarkeit von a_9 durch 9 ist automatisch gegeben, denn wegen $z_{10} = 0$ enthält a_9 genau alle Ziffern von 1 bis 9 und hat daher die Quersumme 45.) Es müssen $z_1 + z_2 + z_3$ und $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6$ durch 3 teilbar sein, also auch $z_4 + z_5 + z_6$. Das bedeutet: Wenn $z_4 = 2$ ist, muss $z_6 = 8$ sein; ist $z_4 = 6$, so folgt $z_6 = 4$.
Wir fassen den bisherigen Stand zusammen: a ist von einer der beiden Formen

$$\text{(a) } {*}4{*}258{*}6{*}0 \quad \text{oder} \quad \text{(b) } {*}8{*}654{*}2{*}0.$$

Dabei steht $*$ für eine ungerade Ziffer.
Noch einmal nutzen wir die Teilbarkeit von a_8 durch 8 aus: Im Fall (a) muss z_7 gleich 1 oder 9 sein, denn 836 und 876 sind nicht durch 8 teilbar. Ebenso ergibt sich, dass im Fall (b) z_7 gleich 3 oder 7 sein muss. Nach analoger Argumentation wie oben muss $z_7 + z_8 + z_9$ durch 3 teilbar sein. Im Fall (a) ist daher für $z_7 = 1$ die Ziffer z_9 gleich 2, 5 oder 8 (alles unmöglich, weil schon verwendet!), bzw. falls $z_7 = 9$ ist, ist z_9 gleich 3 (oder unmöglicherweise 6 oder 9). Im Fall (b) ist, falls $z_7 = 3$ ist, z_9 gleich 1 (oder 4) oder 7, und für $z_7 = 7$ ist z_9 gleich (0 oder) 3 (oder 6) oder 9.
Zum Schluss brauchen wir noch eine kleine Fallunterscheidung der verbliebenen Möglichkeiten – und prüfen, ob a_7 durch 7 teilbar ist:

Fall	z_7	z_9	z_1	z_3	a_7	a_7 durch 7 teilbar?
(a)	1	–				–
(a)	9	3	1	7	1472589	nein
(a)	9	3	7	1	7412589	nein
(b)	3	1	7	9	7896543	nein
(b)	3	1	9	7	9876543	nein
(b)	3	7	1	9	1896543	nein
(b)	3	7	9	1	9816543	nein
(b)	7	3	1	9	1896547	nein
(b)	7	3	9	1	9816547	nein
(b)	7	9	1	3	1836547	nein
(b)	7	9	3	1	3816547	ja, $7 \cdot 545221$

Bei allen Fällen hier sind alle geforderten Teilbarkeiten außer die durch 7 erfüllt, denn die verwendeten Kriterien sind für die Teilbarkeit auch hinreichend, und damit ergibt sich, dass es genau eine Zahl gibt, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, nämlich $a = 3816547290$.

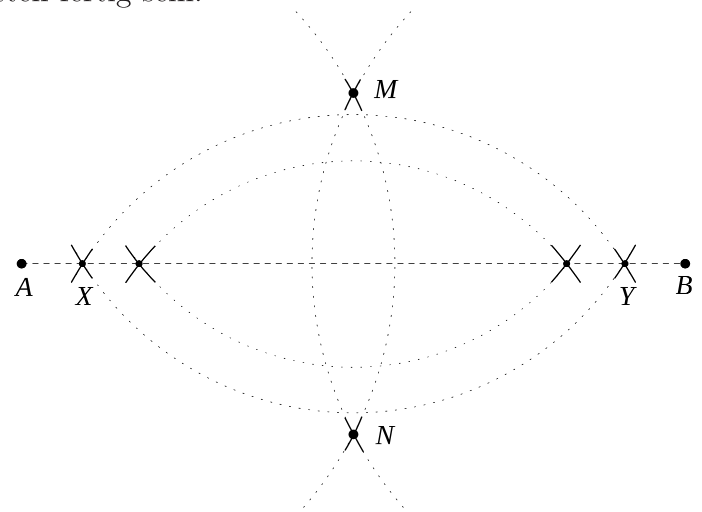
Aufgabe 3

Georg will auf einer großen Landkarte zwei Punkte, die genau 80 cm voneinander entfernt sind, durch eine schnurgerade Strecke verbinden. Er hat aber nur ein sehr kurzes Lineal der Länge 5 cm und einen großen Zirkel, den er auf jede beliebige Radiuslänge kleiner oder gleich 50 cm einstellen kann.
Kann er damit die gesuchte Strecke zeichnen?

Lösung:

Ja, Georg kann selbst mit seinen eingeschränkten Hilfsmitteln die beiden Punkte durch eine schnurgerade Strecke verbinden.

Seien A und B die beiden zu verbindenden Punkte auf der Landkarte. Zuerst stellt Georg den Zirkel auf 50 cm (oder eine beliebige Strecke größer als 40 cm) ein und schlägt jeweils einen Kreis um die beiden Punkte A und B. Da deren Abstand $80\,\text{cm} < 2 \cdot 50\,\text{cm}$ beträgt, schneiden sich die beiden Kreise in zwei Punkten, die wir M und N nennen. Aufgrund dieser Konstruktion ist die (nicht eingezeichnete) Gerade durch M und N die Mittelsenkrechte der gesuchten (aber ebenfalls noch nicht eingezeichneten) Strecke AB und vor allem ist auch umgekehrt die Gerade (AB) die Mittelsenkrechte der Strecke MN.
Nun stellt Georg den Zirkel auf eine Länge knapp unter 50 cm ein, schlägt damit die Kreise um M und N und bestimmt deren beide Schnittpunkte X_1 und Y_1. Diese beiden Punkte liegen dann auf der Mittelsenkrechten von MN, also auf der Geraden durch A und B. Hat Georg den Radius groß genug gewählt, so beträgt der Abstand der beiden Punkte A und X_1 weniger als 5 cm und er kann sie auch mit seinem kurzen Lineal durch eine schnurgerade Strecke verbinden.
Indem Georg den Radius seines Zirkels nun nach und nach verringert, kann er weitere Punkte $X_2, X_3, X_4, \ldots$ und $Y_2, Y_3, Y_4, \ldots$ konstruieren, die zueinander jeweils einen Abstand von weniger als 5 cm besitzen und sämtlich auf der Geraden AB liegen.
Wählt er den Abstand der Punkte nicht zu klein, so wird er nach endlich vielen Schritten fertig sein.



Aufgabe 4

Frau von Klim und Bim will den Abend im Spielkasino verbringen. Sie will nur am Roulettetisch spielen und jedes Mal 10 Euro auf ihre Lieblingsfarbe Rot setzen. Zu Beginn hat sie genau 100 Euro. Sobald sie 200 Euro beisammen hat oder aber sobald sie bankrott ist, hört sie auf zu spielen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau von Klim und Bim mit 200 Euro nach Hause fährt?
Hinweis: Beim Roulette gibt es die Zahlen von 0 *bis* 36*, und genau* 18 *dieser Zahlen sind rot. Setzt man auf Rot und gewinnt, so erhält man das Doppelte des Einsatzes. Wenn keine rote Zahl fällt, ist der Einsatz verloren.*

Lösung:

Zunächst bemerken wir, dass Frau von Klim und Bim ihren Roulette-Abend genau dann beendet, wenn die Anzahl der siegreichen Runden die Anzahl der verlustbringenden Runden das erste Mal um genau 10 übersteigt (dann hat sie 200 Euro) bzw. wenn der umgekehrte Fall eintritt (dann ist sie bankrott). Wenn wir also die Gesamtzahl N der Spielrunden kennen und mit X die Anzahl der Siege, mit Y die Anzahl der Niederlagen bezeichnen, dann gilt am Ende des Abends:

$$X + Y = N \text{ und } X = Y + 10 \text{ bzw. } Y = X + 10\,,$$
$$\text{mit anderen Worten: } X = \frac{N+10}{2} \text{ bzw. } X = \frac{N-10}{2}\,.$$

Es ist $p = \frac{18}{37}$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Rouletterunde eine rote Zahl fällt, also $1 - p = \frac{19}{37}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl nicht rot ist. Nun berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $G(N)$, dass Frau von Klim und Bim nach N Runden mit 200 Euro nach Hause geht:

$$G(N) = p^{\frac{N+10}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{N-10}{2}} \cdot A\,,$$

dabei bezeichnet A die Anzahl der möglichen Abfolgen von siegreichen und verlustreichen Runden, bei denen Frau von Klim und Bim nach genau N Runden das Spiel mit 200 Euro beendet.
Analog ergibt sich die Wahrscheinlichkeit V(N), dass sie nach N Runden mit 0 Euro nach Hause geht:

$$V(N) = p^{\frac{N-10}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{N+10}{2}} \cdot B\,,$$

wobei B entsprechend die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von Siegrunden und Verlustrunden, die zum Bankrott nach genau N Runden führen, bezeichnet. Man beachte, dass sowohl A als auch B nur genau dann von null verschieden sind, wenn N größer oder gleich 10 und gerade ist.
Frau von Klim und Bim startet ihr Spiel mit 100 Euro, also genau in der Mitte von 0 und 200 Euro. Deshalb erhält man aus jeder Anordnung, die zum Bankrott führt, durch Austauschen von Gewinnrunden und Verlustrunden eine Anordnung, die zum 200-Euro-Ausgang führt. Man hat also in

beiden Fällen die gleiche Anzahl von Anordnungsmöglichkeiten, d. h. A und B sind gleich. Daher gilt für gerades $N \geq 10$:

$$\frac{V(N)}{G(N)} = \frac{(1-p)^{10}}{p^{10}} = \left(\frac{19}{18}\right)^{10} \iff V(N) = \left(\frac{19}{18}\right)^{10} \cdot G(N)\,.$$

Letztere Gleichung gilt natürlich auch für alle ungeraden N und alle $N < 10$, denn in diesen Fällen ist ja $G(N) = V(N) = 0$.
Da das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 1 nach endlich vielen Runden zu Ende ist, summieren sich die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ausgänge zu 1. Die einzelnen $G(N)$ summieren sich zu unserer gesuchten Wahrscheinlichkeit G, dass Frau von Klim und Bim das Casino mit 200 Euro verlässt:

$$\begin{aligned}
& 1 = G(1) + V(1) + G(2) + V(2) + G(3) + V(3) + \ldots \\
\iff\ & 1 = G(1) \cdot \left(1 + \left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right) + G(2) \cdot \left(1 + \left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right) + \ldots \\
& = G \cdot \left(1 + \left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right) \\
\iff\ & G = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{19}{18}\right)^{10}\right)} \approx 0{,}368.
\end{aligned}$$

Frau von Klim und Bim fährt also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 36,8 Prozent mit 200 Euro nach Hause; mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 63,2 Prozent geht sie leer aus.