Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 53

Aufgabe 1

Der König will vom Fischer wissen, wie viele Fische im Teich in seinem Schloßgarten sind. Der schlaue Fischer wirft sein Netz aus, holt es ein und zählt 72 Fische. Er markiert die Fische mit einem kleinen roten Punkt und lässt sie wieder frei. Am Tag darauf wirft er sein Netz wieder aus. Beim Einholen des Netzes zählt er diesmal 81 Fische. Von diesen haben vier einen kleinen roten Punkt.
Wie viele Fische sind (ungefähr) im Teich?

Lösung:

Zunächst kann man sagen, dass sich die Anzahl der Fische im Teich durch das beschriebene Vorgehen nicht exakt bestimmen lässt. Sicher ist nur, dass mindestens $72+81-4 = 149$ Fische im Teich schwimmen. Wir können jedoch davon ausgehen, dass sich die 72 freigelassenen, markierten Fische wieder gleichmäßig mit den übrigen Fischen vermischt haben. Das bedeutet, dass beim zweiten Fang das Verhältnis von markierten Fischen zur Gesamtzahl der gefangenen Fische ungefähr genauso groß ist wie das Verhältnis der beim ersten Fang markierten Fische zur Anzahl der Fische im ganzen Teich. Sei nun N die Anzahl der Fische im Teich. Dann gilt:

$$\frac{4}{81} = \frac{72}{N} \iff N = 72 \cdot \frac{81}{4} = 1458$$

Es schwimmen also ungefähr 1458 Fische im Teich.

Aufgabe 2

Wie viele vollständig gekürzte Brüche gibt es, die zwischen 0 und 1 liegen und bei denen das Produkt aus Zähler und Nenner genau 60 ist?
Bei wie vielen ist das Produkt genau $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$?

Lösung:

Wir lösen die Aufgabe am besten gleich allgemein: Bei wie vielen vollständig gekürzten Brüchen ist das Produkt aus Zähler und Nenner gleich einer fest vorgegebenen Zahl $n > 1$?
Wenn $\frac{a}{b}$ ein solcher gekürzter Bruch ist, dann haben a und b keine gemeinsamen Primteiler. Da aber auch $a \cdot b = n$ gelten soll, müssen sich alle Primteiler von n auf a und b verteilen. Wenn $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ die Primfaktorzerlegung von n ist, muss man also für jeden der m Primteiler p_i $(1 \leq i \leq m)$ von n entscheiden, ob er a oder ob er b teilen soll (und dann müssen aufgrund der Teilerfremdheit von a und b gleich alle in n enthaltenen derartigen Primfaktoren $p_i^{k_i}$ in a bzw. b enthalten sein).

Für die Verteilung der m Primteiler auf die zwei Zahlen a und b hat man 2^m Möglichkeiten. Allerdings führt nur genau die Hälfte dieser Möglichkeiten zu einem Bruch $\frac{a}{b}$, der kleiner als 1 ist, denn unter den beiden Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ ist stets genau einer kleiner als 1.
Es gibt also insgesamt genau 2^{m-1} Brüche der geforderten Art.

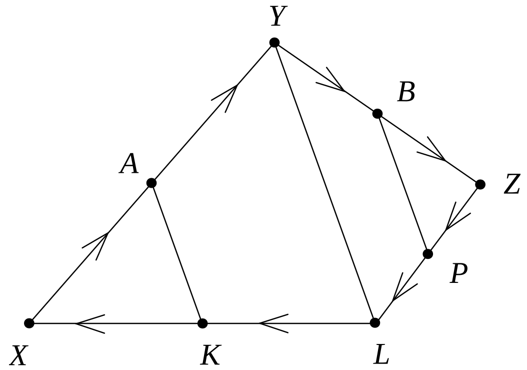
Speziell für $n = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ist $m = 3$; es gibt daher genau $2^2 = 4$ gesuchte Brüche. Diese sind $\frac{1}{60}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{20}$ und $\frac{5}{12}$.
Die Zahl $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$ hat genau die 25 Primfaktoren 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97 (diese Primfaktoren kommen dabei natürlich meist mehrfach vor).
Also gibt es für dieses n genau $2^{24} = 16\,777\,216$ Brüche der geforderten Art, die wir hier aus Platzmangel natürlich nicht alle auflisten können.

Aufgabe 3

Auf einer Wiese gibt es vier Obstbäume. Karolin liegt auf der Wiese auf ihrem Liegestuhl. Aus Langeweile steht sie auf und läuft geradeaus in Richtung des Kirschbaums, bis sie diesen erreicht, und dann weiter in derselben Richtung noch einmal dieselbe Strecke. Von dort aus läuft sie in Richtung des Apfelbaums, und nachdem sie diesen nach einer gewissen Wegstrecke erreicht hat, geht sie dieselbe Strecke noch einmal geradeaus weiter. Dasselbe tut sie nun noch mit dem Birnen- und dem Pflaumenbaum. Überrascht stellt sie fest, dass sie wieder direkt vor ihrem Liegstuhl steht. Karolin überlegt kurz und weiß dann, dass der Kirschbaum genauso weit vom Apfelbaum entfernt steht wie der Birnen- vom Pflaumenbaum und dass der Abstand zwischen Apfel- und Birnbaum derselbe ist wie der Abstand von Pflaumen- zu Kirschbaum. Woher weiß sie das?

Lösung:

Es bezeichnen L den Standort des Liegestuhls, K, A, B und P die Standorte des Kirsch-, Apfel-, Birnen- und Pflaumenbaumes. Außerdem seien X, Y und Z die Orte, die Karolin erreicht, nachdem sie am Kirsch-, Apfel- bzw. Birnenbaum vorbeigelaufen ist.



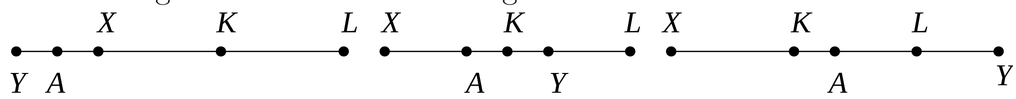
Liegen die drei Punkte L, K und A nicht auf einer gemeinsamen Geraden, so tun dies auch die drei Punkte L, X und Y nicht. Aus der Bedingung

$$\frac{|LX|}{|KX|} = \frac{2}{1} = \frac{|YX|}{|AX|}$$

folgt mit der Umkehrung des Strahlensatzes, dass die beiden Strecken YL und AK parallel zueinander sind. Wiederum mit Hilfe des Strahlensatzes folgt dann das Verhältnis

$$\frac{|YL|}{|AK|} = \frac{|LX|}{|KX|} = \frac{2}{1}\,.$$

Die (äußere) Gleichheit bzw. $|AK| = \frac{1}{2}|YL|$ gilt auch dann, wenn L, K und A auf einer gemeinsamen Geraden liegen:



Wie oben folgt aus der Aufgabenstellung $\frac{1}{2}|XL| = |XK| = |KL|$ und $\frac{1}{2}|XY| = |XA| = |AY|$. Wir unterscheiden, ob A links von, zwischen oder rechts von X und K liegt: Liegt X zwischen A und K, so gilt $|AK| = |XK| + |XA| = \frac{1}{2}(|XL| + |XY|) = \frac{1}{2}|YL|$. Liegt A zwischen X und K, so liegt auch Y zwischen X und L und es gilt $|AK| = |XK| - |XA| = \frac{1}{2}(|XL| - |XY|) = \frac{1}{2}|YL|$. Liegt K zwischen A und X, so liegt auch L zwischen X und Y und es gilt $|AK| = |XA| - |XK| = \frac{1}{2}(|XY| - |XL|) = \frac{1}{2}|YL|$.

In allen Fällen gilt also

$$|YL| = 2 \cdot |AK| \tag{1}$$

Genauso erhalten wir für die zweite Weghälfte von Y über B nach Z und weiter über P nach L, dass auch

$$|YL| = 2 \cdot |BP|$$

gilt. Zusammen mit der obigen Gleichung (1) ergibt das die behauptete Aussage

$$|AK| = |BP|\,.$$

Beginnen wir den Rundweg nun bei X statt am Liegestuhl L, so erhalten wir entsprechend die zweite Aussage $|AB| = |PK|$.

Aufgabe 4

Eine natürliche Zahl heißt *zusammengesetzt*, wenn man sie als Produkt von zwei natürlichen Zahlen, die beide größer als 1 sind, schreiben kann, wenn sie also nicht gleich 1 und keine Primzahl ist.
Finde die größte gerade Zahl, die sich nicht als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen schreiben lässt!

Lösung:

Sei n eine gerade Zahl. Wenn n durch 3 teilbar und $n \geq 18$ ist, dann ist $n = (n-9) + 9$ eine Darstellung von n als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen, denn 9 ist offenbar zusammengesetzt und ungerade und auch $n - 9$ ist in diesem Fall ungerade, durch 3 teilbar und größer als 3 und demnach zusammengesetzt.

Wenn n bei Division durch 3 den Rest 1 lässt und $n \geq 34$ ist, dann ist $n = (n - 25) + 25$ eine gesuchte Darstellung, denn 25 ist offenbar ungerade und zusammengesetzt und in diesem Fall ist auch $n - 25$ ungerade, durch 3 teilbar (weil auch 25 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt) und größer als 3 und demnach zusammengesetzt.
Wenn schließlich n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt und $n \geq 44$ ist, dann hat man mit $n = (n - 35) + 35$ eine Darstellung von n als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen gefunden, weil wieder 35 selbst ungerade und zusammengesetzt ist und $n - 35$ ungerade, durch 3 teilbar und größer als 3 ist.
Zusammengefasst sieht man also, dass falls $n \geq 44$ ist, stets eine Darstellung als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen existiert.
Auch für $42 = 33 + 9$ und $40 = 15 + 25$ gibt es je eine gesuchte Darstellung. Für $n = 38$ allerdings gibt es nur folgende Darstellungen als Summe zweier ungerader Zahlen: $38 = 1 + 37 = 3 + 35 = 5 + 33 = 7 + 31 = 9 + 29 = 11 + 27 = 13 + 25 = 15 + 23 = 17 + 21 = 19 + 19$. In jedem Fall ist hier aber wenigstens einer der Summanden nicht zusammengesetzt.
Die gesuchte größte Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist demnach 38.

Anmerkung: Mit nur wenig mehr Arbeit kann man einsehen, dass die oben gefundenen Bedingungen sogar notwendig für eine Zahl n der entsprechenden Restklasse modulo 3 sind, damit es eine Darstellung der geforderten Art gibt. Alle positiven geraden Zahlen, die keine Darstellung als Summe zweier ungerader zusammengesetzter Zahlen haben, sind demnach 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32 und 38.