Beispiellösungen zu Blatt 48

Aufgabe 1

Finde alle vierstelligen Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Zahl, die man aus ihr durch Ziffernumkehr erhält, genau viermal so groß ist wie die ursprüngliche Zahl.
Gibt es auch eine 2005-stellige Zahl mit dieser Eigenschaft?
Hinweis zur Erläuterung: 1234 *ist zum Beispiel keine solche Zahl, denn* $4 \cdot 1234 \neq 4321$.

Lösung:

Sei $n = 1000a + 100b + 10c + d$ mit $a, b, c, d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und mit $a \geq 1$ eine solche vierstellige Zahl. Dann ist also $4n = 4000a + 400b + 40c + 4d = 1000d + 100c + 10b + a$. Somit muss $a \leq 2$ sein, sonst wäre $4n$ fünfstellig. Da außerdem a die Einerziffer der geraden Zahl $4n$ ist, ist also $a = 2$.
Daraus folgt weiter $d \geq 8$, und weil die Einerziffer von $4 \cdot d$ gleich $a = 2$ sein muss, ist $d = 8$.
Es darf daher beim Multiplizieren mit 4 keinen Übertrag von der Hunderter- zur Tausenderstelle geben, was $b \leq 2$ bedeutet. Außerdem ist b die Einerstelle der Summe von 3 (Übertrag von $4 \cdot 8 = 32$) und der Einerstelle von $4 \cdot c$; also ist b ungerade. Es ist somit $b = 1$.
Für c gilt demnach $c \geq 4$, und Durchprobieren der sechs möglichen Fälle (unter Beachtung, dass $4c + 3 = 10k + 1$ sein muss) zeigt, dass nur $c = 7$ eine Lösung liefert.
In der Tat erfüllt die Zahl $n = 2178$ die Bedingung der Aufgabe, denn $4 \cdot 2178 = 8712$.

Für mehrstellige Zahlen gilt die obige Betrachtung ebenso, sie müssen also von der Form $21\ldots78$ sein. Ein wenig Probieren für fünf- und sechsstellige Zahlen zeigt, dass alle Zahlen der Form $2199\ldots9978$ mit beliebig vielen Neunen die gewünschte Eigenschaft haben: Hat die Zahl n Stellen, so ist $4 \cdot 219\ldots978 = 4 \cdot (22 \cdot 10^{n-2} - 22) = 88 \cdot 10^{n-2} - 88 = 879\ldots912$. Die entsprechende Zahl mit 2001 Neunen ist 2005-stellig und ist demnach Lösung unseres Problems.

Ohne Begründung wollen wir noch angeben, wie alle Zahlen mit der geforderten Eigenschaft aussehen: Jede Zahl besteht aus Blöcken der Form $2199\ldots9978$ mit jeweils beliebig vielen Neunen, allerdings muss die Abfolge der Anzahlen der Neunen „symmetrisch“ sein, d. h. die Anzahl der Neunen im ersten und im letzten Block muss übereinstimmen, die im zweiten und im vorletzten auch usw.
Außerdem dürfen zwischen diesen Blöcken jeweils beliebig viele Nullen stehen. Aber auch hier müssen die Nullen wieder „symmetrisch“ verteilt sein.
Ein Beispiel für solch eine Zahl ist also 21997800021780002199 78.

Aufgabe 2

Andre Becker und Boris Agassi stehen sich in einem Tennis-Match gegenüber. Beide Spieler sind in etwa gleich gut; das Match gewinnt, wer als erster drei Sätze für sich entscheidet.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden volle fünf Sätze gespielt?
Ein Jahr später ist Agassi verletzungsbedingt etwas schwächer und es stellt sich heraus, dass es nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{27}$ zu einem Fünf-Satz-Match kommt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Agassi in diesem Fall einen einzelnen Satz?

Lösung:

Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Andre Becker einen einzelnen Satz gewinnt, und q die Wahrscheinlichkeit, dass Boris Agassi einen Satz gewinnt. Weil beide Spieler etwa gleich gut sind, gilt $p = q$ und mit $p + q = 1$ folglich $p = q = \frac{1}{2}$. Fünf Sätze werden genau dann gespielt, wenn es bis zum vierten Satz noch keinen Sieger gibt. Dafür müssen beide Spieler zweimal gewonnen haben; überdies ist der fünfte Satz in jedem Fall der letzte Satz, weil dann einer der Spieler drei Sätze gewonnen haben muss.
Der Gewinner des ersten Satzes (für diesen gibt es 2 Möglichkeiten) muss also genau einen der Sätze zwei, drei oder vier gewinnen. Daher gibt es $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten, dass ein fünfter Satz notwendig wird. (Wer die Binomialkoeffizienten kennt, erhält diese Zahl auch als $\binom{4}{2}$.) Für jeden einzelnen dieser Spielverläufe ist die Wahrscheinlichkeit $p^2 \cdot q^2$ (nach der Pfadregel), daher ergibt sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit von $6 \cdot p^2q^2 = 6p^4 = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{8}$.

Nach einem Jahr sind die Wahrscheinlichkeiten etwas anders verteilt: Es gilt, noch immer nach obiger Überlegung, $\frac{8}{27} = 6 \cdot p^2q^2$, also $\frac{4}{81} = (pq)^2$. Da $p, q \geq 0$ sind, ist dies zu $\frac{2}{9} = pq$ äquivalent.
Mit $p = 1 - q$ erhält man nacheinander $\frac{2}{9} = (1 - q) \cdot q = q - q^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = q^2 - q + \frac{2}{9} = (q - \frac{1}{3})(q - \frac{2}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{3}$ oder $q = \frac{2}{3}$.
Da Boris Agassi geschwächt ist, gilt also $q = \frac{1}{3}$.

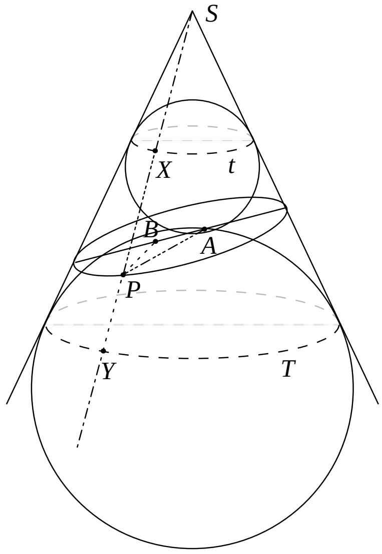
Aufgabe 3

Eine Ebene schneide einen Kegel in einer Ellipse. Des Weiteren seien k und K diejenigen beiden Kugeln, die den Kegel von innen in einem ganzen Kreis sowie die Ebene berühren. Hierbei berühre k die Ebene in A und K die Ebene in B.
Zeige, dass dann A und B die beiden Brennpunkte der Ellipse sind, dass also für jeden Punkt P auf dem Rand der Ellipse die Summe der Abstände $|AP| + |BP|$ gleich ist. Drücke diesen Wert auch durch die Radien der beiden Kugeln und den Abstand ihrer Mittelpunkte aus!

Lösung:

Sei S die Spitze des Kegels und P ein beliebiger Punkt auf dem Rand der Ellipse. Weiterhin berühre k den Kegel im Kreis t und K berühre den Kegel im Kreis T.

Die Gerade durch P und S schneide t in einem Punkt X und T in einem Punkt Y. Demnach berührt die Gerade durch P und S die Kugel k in X, ist also eine Tangente durch P an die Kugel k. Außerdem berührt die Gerade durch P und A die Kugel k im Punkt A, ist also ebenso eine Tangente durch P an die Kugel k. Die beiden Tangentenabschnitte $|PA|$ und $|PX|$ sind aber gleich lang, denn nach dem Satz des Pythagoras gilt sowohl $|PA|^2 + |AM|^2 = |PM|^2$ als auch $|PX|^2 + |XM|^2 = |PM|^2$, wobei M der Mittelpunkt von k ist, und weil $|AM| = |XM|$ gleich dem Radius von k ist, ist in der Tat $|PA| = |PX|$.
Ganz analog sieht man, dass $|PB| = |PY|$ gilt. Daraus folgt schließlich, dass



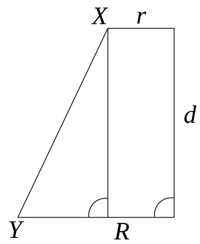
$$|AP| + |PB| = |PX| + |PY| = |XY|.$$

Die Länge der Strecke XY ist nun aber als Abschnitt der Mantellinie zwischen den beiden Berührkreisen unabhängig von P.

Das war zu zeigen.

Genauer erhält man mit dem Satz des Pythagoras, wenn r der Radius von k und R derjenige von K ist und außerdem d den Abstand der Mittelpunkte von k und K bezeichnet, dass gilt:

$$|XY| = \sqrt{d^2 + (R - r)^2}.$$



Aufgabe 4

Forscher finden im vietnamesischen Urwald die Überreste eines lange verlassenen Klosters. In den Ruinen entdecken sie eine Art Schachbrett mit besonderen Figuren: *Mönche*, das sind Figuren, die sich im Prinzip wie ein König beim Schach bewegen, aber nur in zwei der acht möglichen Richtungen ziehen dürfen. Beim Einsetzen der Figur kann der Spieler diese beiden Richtungen frei wählen.
Als Gegenpol zu dem auch schon in früheren Zeiten vorhandenen Bestreben, alles schnell zu erledigen und kurze Wege zu finden, sollten die Mitglieder des Klosters möglichst lange Wege finden.
Zwei der Aufgaben zu den Mönchsfiguren lauteten daher:

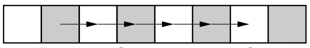
- Es sei auf dem 8 mal 8 Felder großen Brett ein Zielfeld vorgegeben. Wo muss man einen Mönch einsetzen und ihm welche Zugrichtungen zuweisen, damit man das Zielfeld mit so vielen Schritten wie möglich erreicht (aber auch wirklich erreicht), ohne ein Feld doppelt zu betreten?

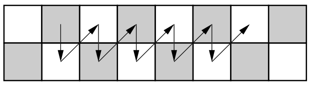
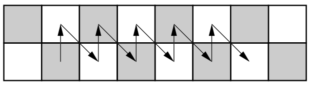
- Wie sieht es aus, wenn man *zwei* horizontal oder vertikal nebeneinander liegende Felder als Zielfelder vorgibt, die in beliebiger Reihenfolge erreicht werden sollen?

Weil dies die 4. Aufgabe ist, noch eine Idee für die, die es besonders knifflig lieben: Schafft man es mit einem Mönch auch, *drei* beliebig vorgegebene Felder in irgendeiner Reihenfolge nacheinander zu erreichen?

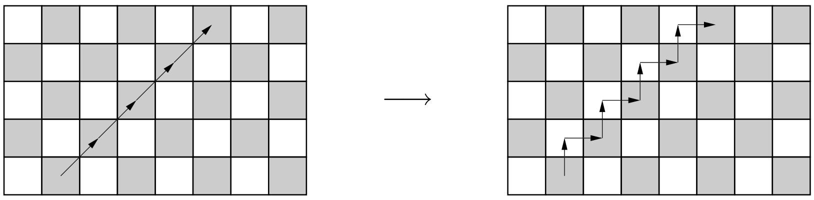
Lösung:

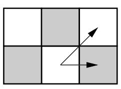
Wir bestimmen zunächst, wie man den (genauer: einen von mehreren) längstmöglichen Weg zwischen einem gegebenen Start- *und* Zielfeld erhält. Darauf aufbauend können wir dann zu einem Zielfeld das im Sinne der Aufgabenstellung optimale Startfeld und die Zugrichtungen des Mönches ableiten.

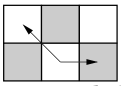
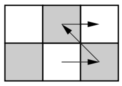
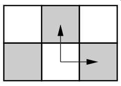
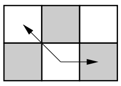
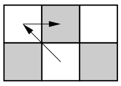
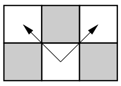
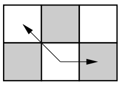
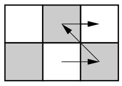
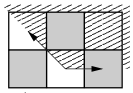
Seien nun also ein Start- und ein Zielfeld gegeben. Erste Beobachtung: Ein optimaler Weg kann nicht nur in eine Richtung führen. Denn wenn dieser in horizontaler oder vertikaler Richtung führt – wir nehmen einmal an, er geht nach rechts  –, so können wir die Länge verdoppeln, indem wir die Zugrichtungen des Mönches anders wählen:

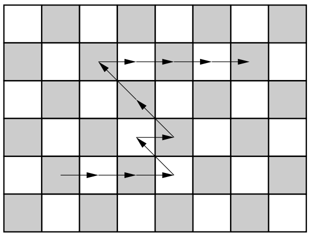
 oder 

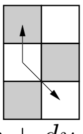
Eine der beiden Ersatzmöglichkeiten kann man immer wählen, da das Schachbrett nicht nur ein Feld breit oder lang ist.
Auch wenn der Weg in diagonaler Richtung führt, kann man einen doppelt so langen Weg finden (der auf dem Brett verläuft, weil dieses rechteckig ist):



Es ist daher so, dass ein optimaler Zug beide Zugrichtungen des Mönches benutzt.
Für die Wahl der Zugrichtungen eines Mönches gibt es im Prinzip nicht viele Möglichkeiten: Dass die beiden Richtungen einander entgegengesetzt verlaufen, ist bereits ausgeschlossen, denn durch das Verbot, ein Feld doppelt zu betreten, kann man nur eine Richtung benutzen. Daher gilt: Die beiden Richtungen schließen entweder einen Winkel von 45°, 90° oder 135° ein. In jedem Fall erkennt man übrigens leicht, dass es dann auch schon automatisch ausgeschlossen ist, dass ein Feld doppelt erreicht werden kann, denn man kann vom aktuellen Feld aus immer nur die Felder erreichen, die sich im Inneren des Winkels der beiden Richtungen befinden. Das zuletzt besuchte liegt aber immer außerhalb dieses Bereiches.
Nun gibt es jedoch keinen optimalen Zug mit einem Winkel der Zugrichtungen von 45°: Wenn der Mönch in die folgenden beiden Richtungen ziehen kann: , dann können wir stattdessen diese beiden Richtungen

wählen:  und jeden Diagonalzug von vorher durch  ersetzen. Damit wird die Zugfolge echt länger, weil ja in beide Richtungen gezogen wird.
Es gibt auch keinen optimalen Zug mit einem Winkel von 90°: Die gewählten Richtungen  lassen sich wiederum durch  ersetzen; statt eines Zugs nach oben wird  ausgeführt. Wenn die Richtungen mit einem Winkel von 90° diagonal gewählt wurden , kann man erneut stattdessen  wählen und die Züge nach rechts oben durch  ersetzen.
Eine Lösung gibt es demnach nur mit zwei Zugrichtungen im Winkel von 135°. Durch Drehen und Spiegeln der Anordnung können wir uns wie schon vorher darauf beschränken, nur die Zugrichtungen  zu betrachten.
Das Zielfeld liegt dann in dem schraffierten Bereich (es liegt auch, wie oben bemerkt, nicht auf den Rändern des Bereiches), und zwar in einer Entfernung von (gerichtet) dx Feldern in x- und dy Feldern in y-Richtung.
Den Zug nach oben muss man offenbar genau dy-mal ausführen, und man macht sich leicht klar, dass es egal ist, wann genau er im Verlauf der Zugfolge gewählt wird – jeder Zug nach links oben erhöht die Differenz in x-Richtung genau um 1, also muss man den Zug nach rechts genau $(dx + dy)$-mal durchführen.

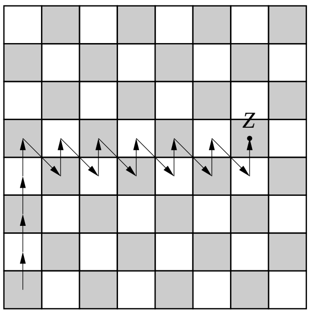
Beispiel: 

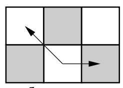
Insgesamt braucht der Mönch daher $dx + 2dy$ Züge.
Wenn das Zielfeld im Inneren des linken oberen Quadranten liegen sollte, so ist dx negativ. Spiegeln wir die Zugrichtungen des Mönchs an der y-Achse, erhalten wir eine Zuglänge von $-dx + 2dy$, also einen längeren Zug.
Liegt das Zielfeld im rechten oberen Quadranten und wählen wir die Zugrichtungen  (wir haben sie also an der Diagonalen gespiegelt), so brauchen wir $2dx + dy$ Züge; falls $dx > dy$ ist, sind das mehr Züge, falls $dx \le dy$ ist, sind es nicht mehr Züge als vorher.
Insgesamt bedeutet dies, dass wir immer einen Zug der Länge $\max\{|dx| + 2|dy|, 2|dy| + |dx|\}$ erreichen können und dass diese Länge die längstmögliche ist. Dazu müssen die Zugrichtungen des Mönches so gewählt werden,

dass das Zielfeld im mittleren der drei 45°-Segmente liegt, die die beiden Richtungen einschließen. (Als Beispiel dazu siehe die Abbildung zum zweiten Aufgabenteil.)

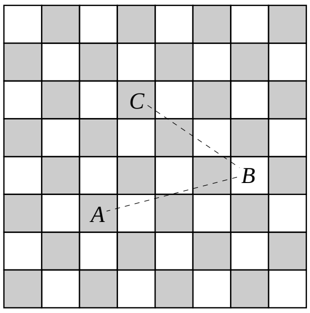
Jetzt können wir uns endlich der eigentlichen Aufgabenstellung zuwenden: Es sei nur ein Zielfeld Z gegeben, und wir müssen das beste Anfangsfeld finden. Dazu müssen wir nun die Beträge der Abstände in x- und y-Richtung maximieren; auf diese Art erreichen wir die am weitesten entfernte Ecke des Brettes. Wenn $|dx| > |dy|$ ist, wählen wir die y- oder $(-y)$-Richtung als die eine Zugrichtung des Mönches, sonst die x- oder $(-x)$-Richtung, und dazu eine passende Diagonalrichtung; eben so, dass das Zielfeld im mittleren der drei 45°-Segmente liegt, die die beiden Richtungen einschließen. Oder noch anders gesagt: Die beiden Richtungen müssen so gewählt werden, dass der Winkel zwischen ihnen und der Strecke zum Zielfeld mindestens 45° beträgt.

Zum zweiten Aufgabenteil: Dieser ist leichter, als er vielleicht aussieht. Man kann sich Folgendes überlegen: Die zu findende Zugfolge muss an einem der beiden Felder enden. Daher kann sich nicht länger sein als eine Zugfolge wie im ersten Aufgabenteil zu diesem Feld. Also wählen wir als Zielfeld dasjenige der beiden Felder, zu dem es den längeren Weg gibt. Das andere Feld muss in dem Rechteck liegen, das das Start- und das Zielfeld als Ecken hat – wäre es außerhalb, wäre der Weg dorthin vom selben Startfeld länger. Also reicht es jetzt zu zeigen, dass man auf dem Weg zum Zielfeld an dem anderen Feld vorbeikommen kann. Dies ist in jedem Fall möglich, denn man kann den Zug nach dem unten abgebildeten Prinzip ausführen (ggf. an der Hauptdiagonalen gespiegelt), wobei man beide angrenzenden Felder berührt.



Die Antwort auf die „Liebhaberaufgabe“ lautet: Ja, es ist in jedem Fall möglich. Die Lösung soll hier allerdings aus Platzgründen nur skizziert werden.
Wie oben kann man ohne sich einzuschränken davon ausgehen, dass die beiden Zugrichtungen im Winkel von 135° zueinander liegen. Zu einer gegebenen Anordnung der drei Punkte versuche man es zunächst mit einer Wahl der Richtungen, bei denen eine horizontal liegt, also z. B. wieder . Dann muss man irgendwo unten anfangen und auf dem Feld nach oben wandern. Dabei erreicht man die drei Felder, sofern die beiden Verbindungsstrecken zwischen dem ersten und dem zweiten sowie die zwischen dem zweiten und dem dritten Zielfeld (von unten gezählt) in dem bekannten Sektor liegt. Ist

dies nicht der Fall, versuche es mit an der Vertikalen gespiegelten Zugrichtungen. Wenn man es in beiden Fällen nicht schafft, muss die Anordnung im Wesentlichen wie folgt aussehen:



Die beiden Strecken sind „flacher“ als 45°, aber in verschiedenen Richtungen (nach rechts oben und nach links oben). In so einem Fall hat man aber Erfolg, wenn man eine Zugrichtung vertikal wählt und das Feld von links oder rechts durchwandert, denn dann hat die Verbindungsstrecke zum letzten Zielpunkt eine Steigung, die für beide möglichen Richtungswahlen passt.