Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 47

Aufgabe 1

Man zeige, dass es nicht möglich ist, in dem folgenden Satz die Buchstaben a, b, c, d, e, f durch Ziffern von 0 bis 9 so zu ersetzen, dass die Aussage des folgenden Satzes wahr wird:

> *In diesem Satz gibt es genau a Ziffern „0", genau b Ziffern „1", genau c Ziffern „2", genau d gerade Ziffern, genau e ungerade Ziffern und genau f Primzahlen.*

Anmerkung: Ursprünglich war die Aufgabe so formuliert, dass man eine Lösung finden sollte. Da aber leider keine Lösung existiert, haben wir den Aufgabentext entsprechend geändert.

Lösung:

Wir nehmen an, es gäbe eine Lösung. Weil in dem Satz in jedem Fall je eine 0, 1 und 2 vorkommen, gilt $a, b, c, e, f \geq 1$ und $d \geq 2$. Daher kann es keine weitere Null geben, es muss $a = 1$ sein. Jetzt folgt schärfer auch $b, e \geq 2$. Weil $d + e = 9$ eine ungerade Zahl ist, muss je genau eine der Ziffern d und e gerade und ungerade sein, also ist sogar $d, e \geq 3$. Aus den noch verbleibenden Möglichkeiten $\{d, e\} \in \{\{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ ergibt sich, dass genau eine der Ziffern d und e eine Primzahl ist. Damit ist auch $f \geq 2$, und weil mit $f = 2$ eine dritte Primzahl im Satz stände, muss sogar $f \geq 3$ sein.
Weil von den noch unbestimmten Variablen somit nur noch c den Wert 1 und nur noch b und c den Wert 2 annehmen können, gilt $b \in \{2, 3\}$ und $c \in \{1, 2, 3\}$. Damit machen wir eine Fallunterscheidung:

> Ist $c = 1$, so folgt $b = 3$. Damit gibt es drei oder vier Primzahlen im Satz (die „2" im Text, $b = 3$, entweder d oder e sowie eventuell noch f). Die genaue Anzahl an Primzahlen hängt dabei nur von f selbst ab. Jedoch: Ist f prim, so folgt $f = 4$, was aber keine Primzahl ist. Ist hingegen f nicht prim, so müsste $f = 3$ sein, was erneut einen Widerspruch erzeugt.
>
> Ist $c = 2$, so muss auch $b = 2$ sein. Dies steht im Widerspruch zum Wert von c.
>
> Ist $c = 3$, so bekommen wir wieder einen Widerspruch, weil es zu der vorhandenen einen Ziffer 2 nur noch eine Variable gibt, die 2 sein kann (nämlich b).

Es gibt demnach keine Möglichkeit, den Satz zu einer wahren Aussage zu machen.

Aufgabe 2

Max hat würfelförmige Bauklötzchen, und zwar einen mit Seitenlänge 7 cm, je fünf mit Seitenlänge 4 cm und 3 cm, sechs mit Seitenlänge 2 cm und sogar zwölf mit Seitenlänge 1 cm.
Kann Max einen voll ausgefüllten Quader bauen und dabei alle zur Verfügung stehenden Klötzchen verwenden?

Lösung:

Da alle Klötzchen verwendet werden sollen, muss der Quader, wenn er existiert, ein Volumen von

$$\begin{aligned} V &= 1 \cdot 7^3 + 5 \cdot 4^3 + 5 \cdot 3^3 + 6 \cdot 2^3 + 12 \cdot 1^3 \\ &= 343 + 320 + 135 + 48 + 12 \\ &= 858 \end{aligned}$$

haben (wir rechnen dabei immer in Zentimetern bzw. Kubikzentimetern).
Da alle Bauklötzchen ganzzahlige Seitenlängen haben, müssen auch die Seitenlängen des Quaders ganzzahlig sein. Seien a, b, c die Seitenlängen des Quaders. Es gilt also: $a \cdot b \cdot c = 858$. Weil der größte Bauklotz bereits eine Kantenlänge von 7 hat, muss außerdem

$$a \geq 7, \quad b \geq 7, \quad c \geq 7 \tag{1}$$

sein. Da a, b, c ganzzahlig sein sollen, gilt: $a \mid 858$ und $b \mid 858$ und $c \mid 858$.
Zerlegt man 858 in Primfaktoren, so erhält man $858 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$ und folglich als Liste der Teiler für 858:

$$\mathbb{T}_{858} = \{1, 2, 3, 6, 11, 13, 22, 26, 33, \ldots, 858\}.$$

Mit (1) ergibt sich $a, b, c \geq 11$. Dies führt zu einem Widerspruch, denn dann ist $a \cdot b \cdot c \geq 11^3 = 1331 > 858$.
Damit kann es so einen Quader nicht geben.

Aufgabe 3

Genau eine der folgenden Zahlen ist eine Primzahl. Welche?

a) $2^{25964951} - 1$;

b) $12345678910111213 \ldots 200520062007$;

c) $12345678987654321^2 + 12345678987654321 + 1$.

Lösung:

Fangen wir hinten an: $12345678987654321 = 111111111^2$ ist eine Quadratzahl. Daher ist die zu untersuchende Zahl von der Form $n^4 + n^2 + 1$, und dieses Polynom (in n) lässt sich faktorisieren:

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)\,.$$

Für $n > 1$ sind beide Faktoren größer als 1, somit ist die dritte Zahl in unserer Liste keine Primzahl.
(Übrigens ist $12345678987654321^2 + 12345678987654321 + 1 = 97 \cdot 157 \cdot 3907 \cdot 207491437 \cdot 12345679098765433$, dabei ist der letzte Primfaktor der Faktor $(n^2 + n + 1)$.)

Die zweite Zahl ist auch nicht prim: Sie ist durch 3 teilbar. Begründung: Da 2007 durch 3 teilbar ist, können wir die hintereinander geschriebenen Zahlen immer in Dreiergruppen betrachten. Von drei aufeinander folgenden Zahlen lässt beim Teilen durch 3 immer je eine den Rest 0, 1 und 2. Damit lässt die Quersumme der drei hintereinander geschriebenen Zahlen denselben Rest wie $0+1+2$, also den Rest 0. Somit ist jede Dreiergruppe für sich durch 3 teilbar, also auch die Zahl selbst.
(Bei dieser Zahl mit ihren 6921 Stellen können wir leider keine Faktorisierung angeben. Wenn wir einem Computerprogramm glauben dürfen, besitzt sie zweimal den Primfaktor 3 und dann keinen weiteren Primfaktor kleiner als 10^{18} – aber noch mindestens zwei weitere (unbekannte) größere!)

Bleibt die erste Zahl: Nach dem Ausschlussprinzip ist sie die Primzahl! Und zwar handelt es sich bei $2^{25964951} - 1$ um die 42. so genannte Mersennesche Primzahl (das sind Primzahlen der speziellen Form $2^k - 1$). Sie wurde im Rahmen eines weltweiten Projektes vom deutschen Augenarzt Dr. M. Nowak im Februar 2005 gefunden.
Die 7.816.230 Ziffern dieser Zahl gibt es sogar auf einem Plakat abgedruckt zu kaufen – eine passende Lupe kann man gleich mit erwerben …

Aufgabe 4

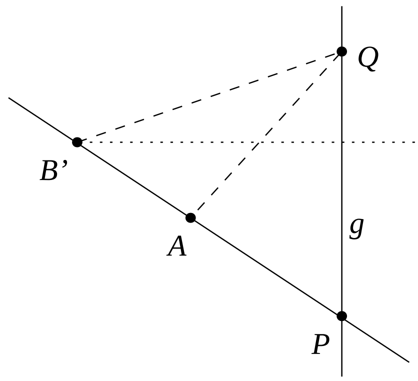
Zwei Punkte A und B liegen auf verschiedenen Seiten bezüglich einer Geraden g in der Ebene, wobei A näher an g liegt als B. Gibt es dann immer einen Punkt P auf der Geraden g, für den die Differenz $|BP| - |AP|$ maximal ist? Wie kann man einen solchen Punkt P nur mit Zirkel und Lineal konstruieren?

Lösung:

Ja, solch einen Punkt P gibt es immer:
Zuerst spiegeln wir den Punkt B an der Geraden g und nennen sein Spiegelbild B'. Es hat dann B' genau denselben Abstand wie B zu jedem Punkt Q auf der Geraden: $|B'Q| = |BQ|$. Folglich können wir im Weiteren statt des Punktes B auch den Punkt B' betrachten.

Da A näher als B an der Geraden g liegt, sind auch A und B' zwei verschiedene Punkte und die Gerade durch A und B' schneidet die Gerade g; der Schnittpunkt sei P.

Dieser Punkt P ist bereits der gesuchte Punkt mit maximalem $|BP| - |AP|$: Da A, B' und P auf einer Geraden liegen und da A näher als B' an der Geraden g – und somit auch näher an P – liegt, gilt: $|B'P| - |AP| = |B'A|$.



Für jeden weiteren Punkt $Q \neq P$ auf der Geraden g liefert uns die Dreiecksungleichung im Dreieck AQB' dann: $|B'A| + |AQ| > |B'Q|$. Dies ergibt zusammen mit der obigen Gleichung für P dann $|B'P| - |AP| = |B'A| > |B'Q| - |AQ|$. Also ist P tatsächlich ein Punkt mit maximaler Differenz $|BP| - |AP|$ (und zwar der einzige).

Zur Konstruktion des Punktes P mit Zirkel und Lineal:
Wir stechen mit dem Zirkel in B und schlagen einen Kreis um B, dessen Radius so groß ist, dass er die Gerade g in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Um diese beiden Schnittpunkte schlagen wir Kreise mit demselben Radius. Diese beiden Kreisen schneiden einander ebenfalls in zwei Punkten: Der eine ist der Ausgangspunkt B, der andere ist sein Spiegelbild B'.
Mit dem Lineal ziehen wir noch die Gerade durch B' und A und erhalten P als Schnittpunkt dieser Geraden und der Geraden g.