

Beispiellösungen zu Blatt 114 (Klasse 5–8)

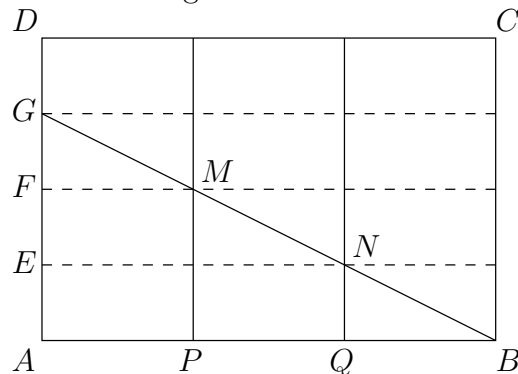
Aufgabe 1

Indem wir ein Blatt Papier zweimal falten, können wir eine seiner Seiten vierteln. Um einen Brief zu verschicken, möchten wir aber oft wissen, wo ein Drittel der Seitenlänge liegt. Ist es ebenfalls möglich, dies exakt und ohne Abmessen herauszufinden?

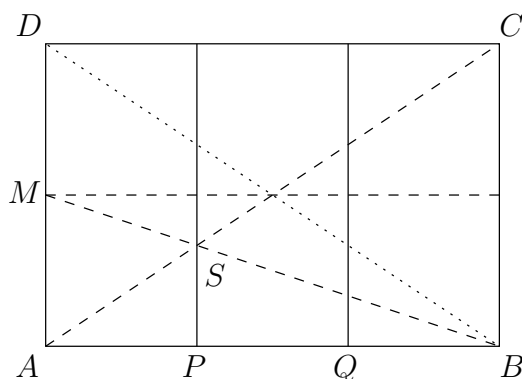
Zusatzfrage: Da ein stark zerknickter Briefbogen zwar für das mathematische Auge interessant, für den praktischen Gebrauch jedoch ungeeignet ist, suchen wir nach einer Konstruktion, die mit möglichst wenigen Knicken auskommt.

Lösung:

1. *Lösung:* Wir nutzen aus, dass wir bereits wissen, wie man Seiten vierteln kann. Durch zweimaliges Halbieren entlang der langen Seite teilen wir die kurze Seite AD in vier gleich große Teile, die durch die Punkte E , F und G voneinander getrennt werden. Hier gibt es einen Teil, den wir bereits gedrittelt haben, nämlich die Strecke AG . Dies möchten wir nun auf die Seite AB übertragen. Dazu falten wir zunächst die Kante BG . Diese wird nun nach dem Strahlensatz durch die bereits gefalteten Parallelen zu AB durch E und F mit den Schnittpunkten M und N ebenfalls gedrittelt. Schließlich falten wir die Parallelen zu AD durch M und N und erhalten durch erneute Anwendung des Strahlensatzes eine Drittelung der Seite AB durch die Punkte P und Q .



2. *Lösung:* Wir halbieren zunächst die Seite AD und erhalten den Mittelpunkt M . Dann falten wir die Diagonale AC und die Strecke BM . Diese schneiden sich im Punkt S . Nun falten wir parallel zu AD durch S und erhalten den Punkt P auf AB . Dabei kommt gleichzeitig A auf der Strecke PB auf einem Punkt Q zu liegen. An der Kante, die im einmal gefalteten Zustand von den Ecken A und D gebildet wird, können wir das Blatt parallel dazu durch Q falten.



Wir behaupten nun, dass P und Q die Seite AB dritteln. Nach dem Strahlensatz genügt es dafür zu zeigen, dass S die Strecke BM im Verhältnis $2 : 1$ teilt.

Dies lässt sich nun z. B. mit einer erneuten Anwendung des Strahlensatzes beweisen: Denn die Strecken BM und AC schneiden sich in S , AM und BC sind parallel und BC ist doppelt so lang wie AM , folglich ist auch BS doppelt so lang wie SM .

Ein alternativer Beweis, auf den uns unser Teilnehmer Achim aufmerksam gemacht hat, nutzt ein wenig Wissen über Seitenhalbierenden: Dazu betrachten wir das Dreieck ABD . Die Strecke BM ist eine Seitenhalbierende und auch die Diagonale AC halbiert die Diagonale BD , denn sie treffen sich gerade im Mittelpunkt des Rechtecks. Damit ist S der Schwerpunkt des Dreiecks ABD und bekanntlich teilt dieser die Seitenhalbierenden gerade im Verhältnis $2 : 1$. Damit ist die Aussage gezeigt.

Aufgabe 2

Anton ist über die Ferien bei seinem Großvater, einem ehemaligen Mathematikprofessor, zu Besuch. Auf einem seiner Streifzüge durch das großväterliche Haus entdeckt er im Keller fünf Dosen und ein kleines Schild, das über den Dosen hängt. Dieses besagt in einer ordentlichen, etwas altmodischen Handschrift: „Auf jeder der Dosen steht eine Aussage. Diese ist genau dann wahr, wenn in der Dose Kekse sind.“ Und tatsächlich klebt ein Zettel mit einem Satz auf dem Deckel einer jeden Dose. Die Aussage auf der fünften Dose ist jedoch nicht mehr zu entziffern. Die vier anderen Aussagen lauten:

1. In jeder der fünf Dosen sind Kekse.
2. In genau zwei der Dosen sind Kekse.
3. In zwei oder drei der Dosen sind Kekse.
4. In mindestens zwei der Dosen sind Kekse.

Nach einer Weile des Nachdenkens ruft Anton nach seinem Großvater: „Du musst mir helfen. Ohne die Aussage auf der 5. Dose kann ich nicht herausfinden, in welcher der Dosen Kekse sind.“

Der Großvater lächelt und sagt: „Ich werde dir noch einen kleinen Tipp geben: Meinst du, ich würde fünf leere Dosen in meinen Keller stellen?“ Nun

dauert es nicht lange, bis auch Anton lächelt und wenig später ist eine weitere der Dosen leer. Von welcher der Dosen konnte Anton sicher wissen, dass in ihr Kekse sind?

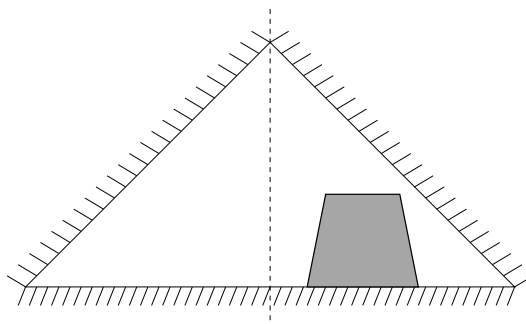
Lösung:

Da in mindestens einer Dose Kekse vorhanden sind, gibt es fünf verschiedene Möglichkeiten für die Anzahl der Dosen mit Keksen. Wir wollen nun überprüfen, ob die Annahme einer bestimmten Anzahl von keksbefüllten Dosen zu einem Widerspruch führt. Angenommen, in fünf Dosen wären Kekse. Dann sind die Aussagen auf den Dosen 2 bis 3 falsch, somit sind dort auch keine Kekse enthalten und es ergibt sich ein Widerspruch. Falls in vier Dosen Kekse enthalten wären, wären die Aussagen 1 und 2 falsch und in den zugehörigen Dosen befänden sich keine Kekse. Dies geht also auch nicht. Sind in drei Dosen Kekse enthalten, so stimmen die Aussagen 3 und 4, in diesen Dosen sind also tatsächlich Kekse. Die Aussagen 1 und 2 träfen nicht zu, und somit müssten sich auch in der fünften Dose Kekse befinden. Diese Situation würde keinen Widerspruch ergeben. Falls in genau zwei Dosen Kekse enthalten sind, treffen die Aussagen 2 bis 4 zu, es würden sich also in mindestens drei Dosen Kekse befinden, was widersprüchlich ist. Falls es letztendlich nur eine Keksdose gäbe, wären alle Aussagen falsch. Somit müssten sich die Kekse in Dose 5 befinden.

Zusammenfassend ist zu bemerken, dass zwei mögliche Keksverteilungen existieren. Bei beiden befinden sich jedoch Kekse in der fünften Dose. Dementsprechend sollte Anton wohl seine Keksjagd durch das Öffnen des Deckels der fünften Dose krönen.

Aufgabe 3

Traudels Trapez-Transportgesellschaft hat nur Lastwagen mit symmetrisch-trapezförmigem Querschnitt. Diese sollen durch einen Tunnel von 8 m Höhe fahren, dessen Querschnitt aus zwei gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken besteht. Dabei dürfen sie natürlich nur auf der rechten Seite fahren. Wie groß ist der maximale Querschnitt eines solchen Lastwagens?



Lösung:

Wir betrachten einen Lastwagen mit maximalem Querschnitt. Der Einfachheit halber sprechen wir allerdings direkt von einem Trapez – es handelt sich ja doch eher um eine Mathematik-Aufgabe ...

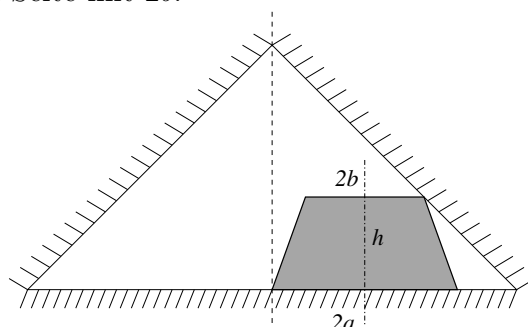
Falls das Trapez nicht die Mittellinie des Tunnels berührt, können wir es nach links verschieben, bis es die Mittellinie berührt. Wir können also ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass ein Trapez maximalen Querschnitts die Mittellinie berührt.

Wenn der obere linke Eckpunkt des Trapezes die Mittellinie berührt, der untere linke aber nicht, dann ist es aufgrund der Geometrie des Tunnels möglich, die untere Seite des Trapezes auf die gleiche Breite wie die obere zu bringen. Damit wird das Trapez sogar echt größer. Wir können also voraussetzen, dass das Trapez unten nicht weniger breit ist als oben.

Wenn schließlich der obere rechte Eckpunkt des Trapezes nicht die schräge Seite des erlaubten Querschnitts-Dreiecks berührt, dann ist es möglich, das gesamte Trapez von der Mittellinie des Tunnels aus nach rechts zu verbreitern, indem die beiden parallelen Seiten länger gemacht werden. Auch dabei vergrößert sich die Fläche.

Hieraus und aus der ersten Beobachtung ergibt sich, dass ein Trapez maximaler Größe in jedem Fall den Fußpunkt der Tunnel-Mittellinie berühren muss.

Ein (erlaubtes) Trapez maximaler Fläche hat also einen Eckpunkt links unten an der Mittellinie und den rechten oberen Eckpunkt an der schrägen Tunnelwand. Wir bezeichnen die Länge der unteren Seite des Trapezes mit $2a$, die der oberen Seite mit $2b$.



Die Mittellinie des Trapezes hat daher von der Mittellinie des Tunnels den Abstand a . Der obere rechte Eckpunkt des Trapezes hat von der Trapez-Mittellinie den Abstand b . Mit h bezeichnen wir die Höhe des Trapezes. Wenn wir ein Koordinatensystem einführen, bei dem der Fußpunkt der Tunnel-Mittellinie im Ursprung liegt, dann hat die obere rechte Ecke des Trapezes also die Koordinaten $(a + b, h)$.

Nun erinnern wir uns an die Formel zur Berechnung der Fläche A eines Trapezes; mit den hier eingeführten Bezeichnungen ergibt sich: $A = (a + b) \cdot h$. Das bedeutet: Der Flächeninhalt ist nur von der Lage des oberen rechten Eckpunktes abhängig; die genaue Form des Trapezes ist noch variabel. Wir müssen also nur denjenigen Punkt auf der Tunnelwand finden, für den der Flächeninhalt maximal ist.

Nun hat nach Vorgabe der höchste Punkt des Tunnels, in Metern gemessen, die Koordinaten $(0, 8)$, während der rechte Eckpunkt die Koordinaten $(8, 0)$ hat. Die Gerade durch diese beiden Punkte hat die Steigung -1 . Damit gilt für alle Punkte auf dieser Geraden, dass die Summe ihrer Koordinaten 8 ist.

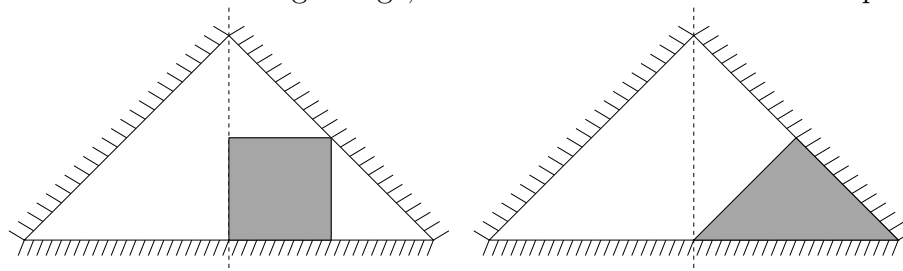
Folglich suchen wir den Wert für h so, dass $(8 - h) \cdot h$ maximal wird. Dabei nutzen wir einen schönen Trick:

$$\begin{aligned}(8 - h) \cdot h &= (4 + (4 - h)) \cdot (4 - (4 - h)) \\ &= 4^2 - (4 - h)^2 \\ &\leq 16,\end{aligned}$$

wobei Gleichheit genau dann erreicht wird, wenn $4 - h = 0$ gilt. Also muss $h = 4$ und $a + b = 8 - h = 4$ sein, womit sich die Fläche des Trapezes zu $4 \cdot 4 = 16$ ergibt. Da die rechte Hälfte des Tunnels einen Querschnitt von $8 \cdot 8/2 = 32$ hat, folgt:

Ein Lastwagen mit maximalem Querschnitt füllt genau den halben Querschnitt der rechten Tunnelhälfte aus.

Die Form des Lastwagens ist dabei variabel zwischen einem Rechteck und einem (rechtwinklig-)gleichschenkligen Dreieck. Dabei gehört das Dreieck als Grenzfall nicht zur Lösungsmenge, weil es kein nicht-entartetes Trapez ist.



Aufgabe 4

Emma möchte ihre Freundin Annabell, die auf der anderen Seite der Stadt wohnt, mit der Straßenbahn besuchen. Sie wohnt 2 km von der Haltestelle entfernt und geht mit 4 km/h. Leider konnte sie sich noch nie so recht den Straßenbahnfahrplan merken, nur die Taktrate von 15 Minuten ist ihr im Gedächtnis geblieben. Auf ihrem Weg zur Straßenbahn sieht sie, wenn die Straßenbahn in die von ihr gewünschte Richtung abfährt, also nicht mehr erreicht werden kann. Jetzt überlegt sie sich eine optimale Strategie für die Jagd nach einer möglichst frühen Straßenbahn, da sie statt des Gehens auch mit 8 km/h rennen kann. Natürlich möchte sie so wenig wie möglich rennen. Wie sieht diese Strategie aus?

Lösung:

Wenn Emma den ganzen Weg rennen würde, würde sie die Haltestelle in 15 Minuten erreichen. Die erste Straßenbahn verpasst sie also auf jeden Fall. Nun suchen wir nach einer Strategie, mithilfe derer sie die nächste Straßenbahn mit Sicherheit erreichen wird. Angenommen, sie geht eine Zeit t , bis sie die erste Straßenbahn in der Ferne losfahren sieht. Dann hat sie noch 15 Minuten, um zur Haltestelle zu gelangen. Wenn sie den ganzen Weg geht, braucht sie dafür 30 Minuten. Da sie doppelt so schnell rennt, wie sie geht, kommt sie für jede Minute des Rennens im Vergleich zum Gehen um eine Minute früher

an der Haltestelle an. Insgesamt hat sie für die gesamte Strecke eine Zeit von $t + 15$ Minuten. Sie muss also $15 - t$ Minuten durch Rennen einsparen, also auch $15 - t$ Minuten rennen, um die zweite Straßenbahn zu erreichen. Da $t \geq 0$ ist, muss sie weniger als 15 Minuten rennen. Folglich lautet ihre Strategie, bis zum Anblick der abfahrenden Straßenbahn zum Zeitpunkt t zu gehen, dann für $15 - t$ Minuten zu rennen und schließlich den Rest des Weges zu gehen.