athematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 112

Aufgabe 1

Bei einem Turnier spielen n Fußballmannschaften so, dass jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere Mannschaft spielt. (Es gibt also kein Hin- und Rückspiel.) Angenommen, keine Mannschaft gewinnt alle ihre Spiele und es gibt kein Unentschieden. Zeige, dass es dann drei Mannschaften A, B, C gibt, für die gilt: A gewinnt gegen B, B gewinnt gegen C, und C gewinnt gegen A.

Lösung:

Wie auch im echten Leben interessieren wir uns für eine der Mannschaften mit den meisten Siegen. Diese Mannschaft sei A. Bezeichnen wir die Menge der von A besiegten Mannschaften mit $\mathcal{B}$. Da es kein Unentschieden gibt und da alle anderen Mannschaften maximal so viele Siege wie A haben, ist diese Menge nicht leer. Die tapfere Truppe der A-Bezwinger bezeichnen wir mit $\mathcal{C}$. Auch diese Menge ist nicht leer, da laut Aufgabenstellung selbst A nicht alle ihrer Spiele gewinnt. Weiterhin ist jede Mannschaft entweder A selbst, oder in $\mathcal{B}$ oder $\mathcal{C}$ enthalten. Wir betrachten ein $C \in \mathcal{C}$. Dieses C gewinnt gegen A. Wenn es gegen alle Mannschaften aus $\mathcal{B}$ gewinnen würde, hätte es einen Sieg mehr als A. Dies widerspräche der Wahl von A. Somit existiert ein $B \in \mathcal{B}$, sodass B gegen C gewinnt. Weiterhin gewinnt A gegen B und C gegen A. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 2

Gegeben seien n beliebige Punkte auf einer Geraden. Ist es möglich, $n+1$ Kreise mit gleichem Mittelpunkt und Radien $k_i \cdot r$ mit positiv ganzzahligen k_i für $i = 1, \dots, n+1$ und einem reellen r derart zu wählen, dass jeder Ring zwischen zwei Kreisen genau einen der gegebenen Punkte enthält?

Seien nun n beliebige Punkte in einer Ebene bzw. im Raum gegeben. Ist es möglich, $n+1$ entsprechend gebildete Sphären zu finden?

Lösung:

Ja, in beiden Fällen ist das Gewünschte möglich.
Fangen wir mit den n Punkten auf einer Geraden an. Wenn es eine Lösung wie gefordert gibt, dann muss der Mittelpunkt M der Kreise von allen n Punkten verschiedene Abstände haben, denn sonst ließe sich nicht vermeiden, dass zwei Punkte in demselben Ring (oder auf demselben Kreis) um M zu liegen kommen. Daher ist es unmöglich, dass M auf einer der Mittelsenkrechten zwischen zweien der n Punkte liegt. Weil es endlich viele Punkte sind, gibt es auch nur endlich viele Mittelsenkrechte – es bleiben daher auf jeden Fall

Punkte in der Ebene übrig, die auf keiner Mittelsenkrechten liegen und auch keiner der gegebenen Punkte sind.
Wir können nun tatsächlich einen beliebigen solchen Punkt als M auswählen. Seien $P_1, \ldots, P_n$ die Punkte auf der Geraden und seien $d_i = |P_iM|$, $i = 1, \ldots, n$ die (paarweise verschiedenen) Abstände der Punkte von M. Sei $e > 0$ die kleinste Differenz zwischen zweien der d_i.
Nun wählen wir ein geeignetes r, nämlich $r = \frac{e}{2}$. (In der Tat ist jeder Wert kleiner als e für r möglich, aber es war ja nicht gefordert, einen möglichst großen Wert zu nutzen.) Zu diesem Wert von r kann man tatsächlich geeignete k_i finden: Zu zeigen ist nur, dass es zu je zwei „benachbarten" d_a und d_b, $d_a < d_b$ („benachbart" soll heißen, dass es kein d_j mit $d_a < d_j < d_b$ gibt) ein k_m mit $d_a < k_m \cdot r < d_b$ gibt.
Seien dazu z_a und z_b ganze Zahlen mit $z_a \cdot r \leq d_a < (z_a + 1) \cdot r$ und $z_b \cdot r \leq d_b < (z_b + 1) \cdot r$. (Die z_i stellen also den ganzzahligen Anteil der Division von d_i durch r dar.) Wegen $2r \leq d_b - d_a$ ist $z_a + 2 \leq z_b$. Nun wählen wir $k_m = z_a + 1$ und zeigen, dass diese Wahl erfolgreich ist: Nach Voraussetzungen ist $d_a < k_m \cdot r$ und $k_m \cdot r < (k_m + 1) \cdot r \leq z_b \cdot r \leq d_b$, und damit trennt tatsächlich der Kreis um M mit Radius $k_m \cdot r$ die beiden Punkte P_a und P_b.

Sind Punkte in einer Ebene oder im Raum gegeben, gestaltet sich die Lösung ganz ähnlich: Der gemeinsame Kreismittelpunkt M darf auf keiner der Mittelebenen zwischen zwei gegebenen Punkten liegen. Wiederum gibt es nur endlich viele solcher Ebenen – daher gibt es immer noch Punkte im Raum, die auf keiner solcher Ebene liegen und auch keiner der gegebenen Punkte sind. Nun greift man sich einen solchen Punkt heraus und betrachtet die Abstände zu den gegebenen Punkten – und ab hier ist die Lösung genau so wie im vorigen Fall.

Bemerkung: Die Aufgabe war, wenn man so will, mit einiger „Reserve" gestellt. Nicht nur, dass man große Wahlmöglichkeiten beim r und bei den k_i hat, wenn man r nur klein genug wählt, sondern wenn man sich die Argumentation genau anschaut, kann man erkennen, dass man M im ersten Fall sogar auf der Geraden wählen kann, was das Problem um eine ganze Dimension verkleinert.

Aufgabe 3

Seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Summe jeweils zwei dieser Zahlen nicht-negativ ist. Zeige, dass dann

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$$

für alle Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ gilt, für die $x_i > 0$ ist und $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ gilt.

Lösung: Da die linke Seite von Grad 2 und die rechte Seite von Grad 3 ist, lohnt es sich, links mit $(x_1 + \ldots + x_n)$ zu multiplizieren. Danach haben beide Seiten Grad 3, der Wahrheitsgehalt hat sich aber aufgrund der Voraussetzung

$\sum_{i=1}^{n} x_n = 1$ nicht verändert. Nun sehen wir aber, dass

$$(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)(x_1 + \ldots + x_n) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i + a_j)x_ix_j$$

gilt. Da nun nach Voraussetzung $x_i, x_j > 0$ und $a_i + a_j \geq 0$ gilt, sind alle Summanden dieser großen Summe nicht-negativ. Somit folgt

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)(x_1 + \ldots + x_n)$$
$$= a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i + a_j)x_ix_j \geq a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2,$$

also genau die Behauptung.

Aufgabe 4

Im Hof des Obstbauern stehen 99 Körbe mit Äpfeln und Birnen. Jeder Korb enthält sowohl Äpfel als auch Birnen, ihre Anzahl muss jedoch nicht übereinstimmen. Ist es möglich, 50 Körbe so zu wählen, dass diese mehr als 50 % aller Äpfel und mehr als 50 % aller Birnen enthalten? Kann die Methode darauf verallgemeinert werden, $n + 1$ aus $2n + 1$ Körben auszuwählen?

Lösung:

Wir lösen direkt die allgemeine Aufgabe für $2n + 1$ Körbe. Angenommen, es wäre nicht möglich, die Körbe so zu wählen. Dann muss umgekehrt jede Menge von n Körben von einer der Obstsorten mindestens 50 % enthalten. Wir nummerieren nun die Körbe mit $1, 2, \ldots, 2n + 1$ durch.
Die Körbe $1, 2, \ldots, n$ enthalten nun von einer Obstsorte mindestens 50 %, wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass dies Äpfel sind. Nun können die n Körbe $n+2, n+3, 2n+1$ nicht ebenfalls 50 % der Äpfel enthalten, da nach Voraussetzung der Korb $n + 1$ ebenfalls Äpfel enthält. Folglich müssen diese n Körbe 50 % der Birnen enthalten. Nun sehen wir aber genauso, dass die Körbe $2, 3, \ldots, n + 1$ nicht 50 % der Birnen enthalten können und somit 50 % der Äpfel enthalten müssen. Völlig analog können wir nun zeigen, dass auch die Körbe $3, 4, \ldots, n + 2$ und die Körbe $4, 5, \ldots, n + 3$ und allgemein auch die Körbe $k + 1, \ldots, n + k$ für alle $0 \leq k \leq n + 1$ mindestens 50 % der Äpfel enthalten. Für $k = n + 1$ bedeutet dies, dass die Körbe $n + 2, \ldots, 2n + 1$ mindestens die Hälfte der Äpfel enthalten, jedoch wurde dies oben ausgeschlossen.
Wir haben also aus der Annahme, dass eine solche Auswahl nicht möglich ist, einen Widerspruch gefolgert, damit ist sichergestellt, dass es eine solche Auswahl stets gibt, insbesondere natürlich auch für $n = 49$, also für 99 Körbe.