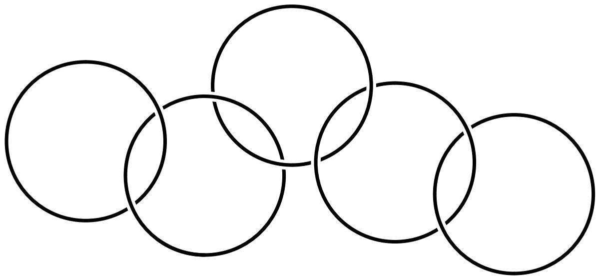
Beispiellösungen zu Blatt 103

Aufgabe 1

Ein Käfer krabbelt auf einer Skulptur aus fünf Ringen herum. Benachbarte Ringe sind so ineinander verschränkt, dass an dem erstem Kreuzungspunkt der eine Ring und an dem anderen Kreuzungspunkt der andere Ring oben liegt, siehe Abbildung.



An den Kreuzungspunkten kann der Käfer nur hinunterspringen, nicht hochklettern. Er steht anfangs links auf dem linken Ring und möchte alle Ringe einmal vollständig abgehen und keinen Abschnitt doppelt betreten.
Wie viele Möglichkeiten hat er dazu? Oder geht das gar nicht?

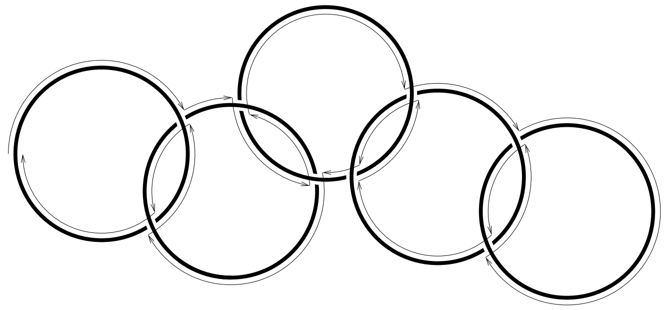
Lösung:

Wir stellen zunächst Grundsätzliches fest: Die Ringe bilden eine nicht geschlossene Kette; zwei benachbarte Ringe kreuzen sich an genau zwei Stellen, dabei ist an der einen Stelle der eine Ring oben, an der anderen der andere. Beispielhaft betrachten wir den ersten (linken) und zweiten Ring. Um vom ersten zum zweiten Ring zu kommen, kann der Käfer also genau an einer Stelle hinunterspringen. Springt er nicht an dieser Stelle, wenn er das erste Mal dort ankommt, dann muss er ja weitergehen; er ist dann also an dieser Kreuzungsstelle den kompletten oberen Teil abgelaufen und verbaut sich damit jede weitere Chance, nach unten zu springen. Für den Rückweg von rechts nach links gilt das natürlich auch, so dass insgesamt gilt:

> Immer, wenn der Käfer oben an eine Kreuzung ankommt, muss er hinunterspringen.

Daraus folgt dann auch, dass der Käfer niemals unten an eine Kreuzung kommen darf, da er damit verhindern würde, dass er dort später hinunterspringen kann. Somit muss er vom Startpunkt aus im Uhrzeigersinn wandern.
Es bleibt damit die Wahl, ob er, bei einem neuen Ring angekommen, nach links oder nach rechts springt. Wenn er nach rechts springt, dann geht er am Rand des Überschneidungsbereiches der beiden Ringe weiter und kommt natürlich an die zweite Spitze dieses Überschneidungsbereiches. Hier kann er

nicht erneut nach rechts springen, weil er damit den Rückweg antreten und den restlichen Teil der Skulptur nicht mehr ablaufen würde. Also springt er nach links und erreicht so wieder den vorigen Kreuzungspunkt, wo er dann nach rechts springen muss.
Anders gesagt hat der Käfer immer dann, wenn er einen neuen Ring erreicht, die Wahl, ob er den Überschneidungsbereich sofort umrunden will oder nicht. Wenn er sich dafür entscheidet, ihn nicht zu umrunden, dann kann und muss er ihn offenbar beim Rückweg umrunden, da hat er dann keine Wahl mehr.
Da es vier Überschneidungsbereiche gibt, gibt es demnach $2^4 = 16$ Möglichkeiten für einen Rundweg. Eine von ihnen ist hier dargestellt.



Aufgabe 2

Bei der Fußball-EM 2012 hat einer der Vorrundengegner Deutschlands, nämlich die Niederlande, alle drei Vorrundenspiele im selben Stadion ausgetragen. Die anderen Mannschaften dieser Vorrundengruppe hatten je zwei Spiele an dem einen Ort und ein drittes am anderen.
Ganz allgemein gilt in der Vorrunde: Vier Mannschaften spielen jeder gegen jeden. Dabei werden an drei Tagen immer zwei Spiele gleichzeitig ausgetragen, und es stehen zwei Stadien zur Verfügung.
Ist es möglich, den Spielplan so zu gestalten, dass jede Mannschaft in jedem Stadion mindestens ein Spiel spielt?

Lösung:

Es gibt viele verschiedene Lösungswege, wir stellen nur einen vor: Sei angenommen, dass es einen Spielplan wie gewünscht gäbe. Dann betrachten wir eine der Mannschaften, A. Die anderen Mannschaften seien B, C und D. Nach Voraussetzung spielt A in einem der beiden Stadien – es heiße 1 – genau ein Spiel und in dem anderen (Stadion 2) zwei Spiele. Der Gegner von A in Stadion 1 sei ohne Einschränkung die Mannschaft B. An den beiden anderen Spieltagen spielen A und B nicht gegeneinander, und nach Voraussetzung spielt A in Stadion 2. Damit muss B auch an diesen Spieltagen in Stadion 1 spielen und bestreitet dort mithin alle seine Spiele. Das ist ein Widerspruch zur Annahme – es ist also nicht möglich, einen solchen Spielplan zu konstruieren.
Bemerkung. Es ist umgekehrt offensichtlich auch nicht möglich, dass es mehr als eine Mannschaft gibt, die immer im gleichen Stadion spielt. Damit gibt es also, was die Aufteilung auf die Stadien gibt, im Wesentlichen

nur eine Art von Spielplan; er ist im Detail dadurch festgelegt, welche der vier Mannschaften in nur einem Stadion spielt und welches Stadion das ist.

Aufgabe 3

Mathematiker sind so gar nicht abergläubisch: Alexandra und Ulrich wollen an einem Monats-Dreizehnten heiraten. In welchem Monat, ist noch offen – wenn es geht, sollen sowohl der „verflixte“ 7. als auch der 13. Hochzeitstag ein Freitag sein. Das muss dann doch wirklich Glück bringen!
Können sie diesen Plan in den Jahren 2013 oder 2014 verwirklichen? An was für einem Wochentag müssten sie dann heiraten?

Lösung:

Bekanntlich ist $365 = 52 \cdot 7 + 1$. Daher verschiebt sich der Wochentag eines festen Datums mit dem Ablauf jedes Jahres ohne Schalttag um einen Tag nach hinten. Liegt ein 29. Februar (Schalttag) dazwischen, sind es zwei Wochentage.
In den 6 Jahren zwischen dem 7. und dem 13. Hochzeitstag sollen 7 Wochentage hinzukommen; daher darf genau ein Schalttag dazwischen sein. Nach Voraussetzung ist der 7. Hochzeitstag im Jahr 2020 oder 2021, der 13. im Jahr 2026 oder 2027. Relevante Schalttage sind am 29. Februar 2020 und am 29. Februar 2024. Daher darf der 7. Hochzeitstag nur im Zeitraum vom 1. März 2020 bis 31. Dezember 2021 liegen; das ist aber auch die einzige Einschränkung, solange er denn tatsächlich ein Freitag ist.
Die Hochzeit muss folglich zwischen dem 1. März 2013 und dem 31. Dezember 2014 stattfinden. Bis zum 7. Hochzeitstag gibt es in jedem dieser Fälle genau zwei Schalttage (in den Jahren 2016 und 2020). Somit muss der Wochentag des Hochzeitstages um $7 + 2 = 9$ Wochentage vor einem Freitag liegen, also ein Mittwoch sein.
Nun reicht ein Blick in den Kalender, ob es Mittwoche als Monatsdreizehnte gibt – ja: Alexandra und Ulrich können am 13. März 2013, am 13. November 2013 oder am 13. August 2014 heiraten.

Aufgabe 4

Auf dem Tisch steht ein Stapel mit n Cent-Stücken. Zwei Spieler spielen abwechselnd und dürfen in einem Zug einen vorhandenen Stapel in zwei kleinere Stapel teilen. Gewonnen hat, nach wessen Zug zum ersten Mal nur 1er- und 2er-Stapel da sind. Wer kann gewinnen?

Lösung:

Sind am Anfang genau $n = 3$ oder eine gerade Anzahl von Cent-Stücken vorhanden, kann der anfangende Spieler den Sieg erzwingen. Ist jedoch eine ungerade Anzahl $n \geq 5$ vorhanden, so kann der zweite Spieler den Sieg erzwingen.

Es sei A der beginnende Spieler und B der andere Spieler. Sind am Anfang genau drei oder vier Cent-Stücke vorhanden, so kann Spieler A den Stapel in einen Einer- und einen Zweierstapel bzw. in zwei Zweierstapel teilen und hat gewonnen.

Ist $n = 2k$ gerade, so kann A den Stapel in zwei gleich große Stapel à k Münzen teilen. Seine Strategie besteht dann fortan darin, diese beiden Mengen als Spiegelbilder voneinander zu betrachten: Alles, was B mit einem der Stapel der einen Menge macht, macht A mit dem entsprechenden Stapel der anderen Menge nach. So kann B nicht gewinnen, denn wenn es vor seinem Zug einen Stapel mit mindestens drei Münzen gibt, so muss es in der anderen Menge als Spiegelbild einen weiteren solchen Stapel geben.
Da nach spätestens $n - 1$ Zügen nur noch Einerstapel vorhanden wären, ist das Spiel in endlicher Zeit zu Ende und A gewinnt.

Ist die Anfangszahl $n \geq 5$ ungerade, so kann B mit der folgenden Strategie den Sieg erzwingen:
Gibt es nur noch einen Stapel mit mehr als zwei Münzen und enthält dieser genau 3 oder 4 Cent-Stücke, so teilt er diesen in einen Zweier- und einen Einer- oder Zweierstapel und hat gewonnen (dies nennen wir Sonderzug S).
Andernfalls teilt er den einzigen Stapel mit einer geraden Anzahl ℓ von Münzen in einen Einer- und einen $(\ell - 1)$er-Stapel.

Zuerst klären wir, dass bei dieser Spielweise B immer genau einen Stapel mit einer geraden Anzahl vorfindet, und anschließend zeigen wir, dass B so gewinnt.
Da am Anfang n ungerade ist, muss A den Stapel in zwei Teile teilen, von denen dann genau einer eine gerade Anzahl und der andere eine ungerade Anzahl an Münzen enthält. Folglich gibt es dann genau einen Stapel mit einer geraden Anzahl an Cent-Stücken. So ein Stapel kann immer geteilt werden. Trennt B hiervon einen Einerstapel ab, so enthalten beide neu entstandenen Stapel und damit wiederum alle Stapel eine ungerade Anzahl an Münzen. Es muss A dann erneut einen Stapel mit einer ungeraden Anzahl teilen. Folglich kann B stets nach der obigen Strategie ziehen.

Da am Anfang $n \geq 5$ ist, kann A nicht mit dem ersten Zug gewinnen, denn in seiner Teilung entsteht mindestens ein Stapel mit $\lceil \frac{n}{2} \rceil \geq 3$ Münzen.
Führt B in einem Zug nicht seinen Sonderzug S aus, so muss es – vor seinem Zug – mindestens zwei Stapel mit mehr als 2 Münzen oder mindestens einen Stapel mit mindestens 5 Münzen geben.
Beides trifft dann aber auch nach seinem Zug zu: Enthält der „gerade“ Stapel genau 2 Münzen, so fasst B gar keinen der beschriebenen großen Stapel an. Enthält der „gerade“ Stapel mindestens 6 Münzen, so hat einer der neuen Stapel mindestens 5 Münzen. Enthält der „gerade“ Stapel genau 4 Münzen, so muss es in der obigen Situation einen weiteren Stapel mit mehr als 2 Münzen geben. Dieser Stapel existiert auch nach dem Zug von B noch, bei dem aus dem Viererstapel ein Dreierstapel entsteht.
Offensichtlich kann A anschließend in keinem der beiden Fälle einen Zug ausführen, der ihm den Sieg beschert. Folglich gewinnt diesmal B.