23. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung.

David Hilbert

Bisher habe ich im Allgemeinen möglichst bestimmte und specielle Probleme genannt, in der Erwägung, daß es gerade die bestimmten und speciellen Probleme sind, die uns am meisten anziehen und von denen oft der nachhaltigste Einfluß auf die Gesamtwissenschaft ausgeht. Dennoch möchte ich mit einem allgemeinen Probleme schließen, nämlich mit dem Hinweise auf eine Disciplin, die bereits mehrmals in meinem Vortrage Erwähnung fand – eine Disciplin, die trotz der erheblichen Förderung, die sie in neuerer Zeit durch Weierstrass erfahren hat, dennoch nicht die allgemeine Schätzung genießt, die ihr meiner Ansicht nach zukommt – ich meine die *Variationsrechnung.*[1]

Die Variationsrechnung im weitesten Sinne ist die Lehre vom Variiren der Functionen und erscheint uns als solche wie eine denknotwendige Fortsetzung der Diferential- und Integralrechnung. So aufgefaßt, bilden beispielsweise die Poincaréschen Untersuchungen über das Dreikörperproblem ein Kapitel der Variationsrechnung, insofern darin Poincaré aus bekannten Bahncurven von gewisser Beschaffenheit durch das Princip des Variirens neue Bahncurven von ähnlicher Beschaffenheit ableitet.

Den am Anfange meines Vortrags gemachten allgemeinen Bemerkungen über Variationsrechnung füge ich hier eine kurze Begründung hinzu.

Das einfachste Problem der eigentlichen Variationsrechnung besteht bekanntlich darin, eine Funktion y der Veränderlichen x derart zu finden, daß das bestimmte Integral

$$J = \int_a^b F(y_x, y; x) dx, \qquad \left[y_x = \frac{dy}{dx} \right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt y andere Funktionen von x mit den nämlichen gegebenen Anfangs- und Endwerten in das bestimmte Integral einsetzen. Das Verschwinden der ersten Variation im üblichen Sinne

$$\delta J = 0$$

liefert für die gesuchte Funktion y die bekannte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{dF_{y_x}}{dx} - F_y = 0\,, \qquad \left[F_{y_x} = \frac{\partial F}{\partial y_x} \right]. \tag{1}$$

Um nun des Näheren die notwendigen und hinreichenden Kriterien für das Eintreten des verlangten Minimums zu untersuchen, betrachten wir *das Integral*

$$J^* = \int_a^b \{F + (y_x - p)F_p\}\, dx\,, \qquad \left[F = F(p, y; x),\ F_p = \frac{\partial F(p, y; x)}{\partial p} \right]$$

[1] Lehrbücher sind: Moigno-Lindelöf "Leçons du calcul des variations", Paris 1861 und A. Kneser, "Lehrbuch der Variationsrechnung", Braunschweig 1900.

und fragen, wie darin p als Funktion von x, y zu nehmen ist, damit der Wert dieses Integrals J^* von dem Integrationswege d. h. von der Wahl der Function y der Variabeln x unabhängig wird. Das Integral J^* hat die Form

$$J^* = \int_a \{Ay_x - B\} dx\,,$$

wo A und B nicht y_x enthalten, und das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J^* = 0$$

in dem Sinne, den die neue Fragestellung erfordert, liefert die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

d. h. wir erhalten für die Funktion p der beiden Veränderlichen x, y die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1^*) \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial (pF_p - F)}{\partial y} = 0\,.$$

Die gewöhnliche Diferentialgleichung zweiter Ordnung (1) und die eben gefundene partielle Differentialgleichung (1*) stehen zu einander in engster Beziehung. Diese Beziehung wird uns unmittelbar deutlich durch die folgende einfache Umformung:

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \textstyle\int_a^b \{F_y \delta y + F_p \delta p + (\delta y_x - \delta p) F_p + (y_x - p)\delta F_p\}\, dx \\ &= \textstyle\int_a^b \{F_y\, \delta y + \delta y_x F_p + (y_x - p)\delta F_p\}\, dx \\ &= \delta J + \textstyle\int_a^b (y_x - p)\delta F_p\, dx\ . \end{aligned}$$

Wir entnehmen nämlich hieraus folgende Thatsachen: wenn wir uns irgend eine *einfache* Schaar von Integralcurven der gewöhnlichen Diferentialgleichung zweiter Ordnung (1) verschaffen und dann eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$(2) \qquad y_x = p(x, y)$$

bilden, die diese Integralcurven ebenfalls als Lösungen zuläßt, so ist stets die Funktion $p(x, y)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*); und umgekehrt, wenn $p(x, y)$ irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (1*) bedeutet, so sind die sämtlichen nicht singulären Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung (2) zugleich Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1); oder kurz ausgedrückt: wenn $y_x = p(x, y)$ eine Integralgleichung erster Ordnung der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) ist, so stellt $p(x, y)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichugg (1*) dar und umgekehrt; die Integralcurven der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) sind also zugleich die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichnng erster Ordnung (1*).

In dem vorliegenden Falle finden wir das nämliche Resultat auch mittelst einer einfachen Rechnung; diese liefert uns nämlich die in Rede stehenden Differentialgleichungen (1) bez. (1*) in der Gestalt

$$
y_{xx} + F_{y_x y_x} + y_x\, F_{y_x y} + F_{y_x x} - F_y = 0 \tag{1}
$$

bez.

$$
(p_x + p p_y) F_{pp} + p F_{py} + F_{px} - F_y = 0 \tag{1*}
$$

wo die unteren Indices in leichtverständlicher Schreibweise die partiellen Ableitungen nach x, y, p, y_x bedeuten. Hieraus leuchtet die Richtigkeit der behaupteten Beziehung ein.

Die vorhin aufgestellte und soeben bewiesene enge Beziehung zwischen der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) und der partiellen Differentiaigleichung erster Ordnung (1*) ist, wie mir scheint, für die Variationsrechnung von grundlegender Bedeutung. Denn wegen der Unabhängigkeit des Integrales J^* vom Integrationswege folgt nunmehr

$$
\int_a^b \{F(p) + (y_x - p) F_p(p)\}\, dx = \int_a^b F(\bar{y}_x) dx\,, \tag{3}
$$

wenn wir das Integral linker Hand auf irgend einem Wege y und das Integral rechter Hand auf einer Integralcurve $\bar{y}$ der Differentialgleichung

$$
\bar{y}_x = p(x, \bar{y})
$$

genommen denken. Mit Hülfe der Gleichung (3) gelangen wir zu der Weierstrassschen Formel

$$
\int_a^b F(y_x) dx - \int_a^b F(\bar{y}_x) dx = \int_a^b E(y_x\,, p) dx \tag{4}
$$

wo E den von den 4 Argumenten $y_x\,, p, y, x$ abhängigen Weierstrassschen Ausdruck

$$
E(y_x\,, p) = F(y_x) - F(p) - (y_x - p) F_p(p)
$$

bezeichnet. Da es hiernach lediglich darauf ankommt, die in Rede stehende Integralcurve y in der xy-Ebene auf eindeutige und stetige Weise mit Werten einer entsprechenden Integralfunktion $p(x, y)$ zu umgeben, so führen die eben angedeuteten Entwickelungen unmittelbar – ohne Heranziehung der zweiten Variation sondern allein durch Anwendung des Polarenprocesses auf die Differentialgleichung (1) – zur Aufstellung der Jacobischen Bedingung und zur Beantwortung der Frage, inwiefern diese Jacobische Bedingung im Verein mit der Weierstrassschen Bedingung $E > 0$ für das Eintreten eines Minimums notwendig und hinreichend ist.

Die angedeuteten Entwickelungen, lassen sich ohne daß eine weitere Rechnung nötig, wäre, auf den Fall zweier oder mehr gesuchter Funktionen, sowie auf den Fall eines Doppel- oder mehrfachen Integrals übertragen. So liefert beispielsweise im Fall des über ein gegebenes Gebiet ω erstreckenden Doppelintegrals

$$J = \int F(z_x\,, z_y\,, z; x, y) d\omega \qquad \left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x}\,, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \right]$$

das im üblichen Sinne zu verstehende Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J = 0$$

für die gesuchte Funktion z von x, y die bekannte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(I)} \qquad \frac{dF_{z_x}}{dx} + \frac{dF_y}{dy} - F_x = 0\,. \qquad \left[F_{z_x} = \frac{\partial F}{\partial z_x}\,, \quad F_{z_y} = \frac{\partial F}{\partial z_y}\,, \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z} \right].$$

Andererseits betrachten wir *das Integral*

$$J^* = \textstyle\int \{F + (z_x - p)F_p + (z_y - q)F_q\} d\omega\,,$$
$$\left[F = F(p, q, z; x, y),\ F_p = \tfrac{\partial F(p,q,z;x,y)}{\partial p},\ F_q = \tfrac{\partial F(p,q,z;x,y)}{\partial q} \right]$$

und fragen, wie darin p und q als Funktionen von x, y, z zu nehmen sind, damit der Wert dieses Integrals von der Wahl der durch die gegebene geschlossene Raumcurve gelegten Fläche d. h. von der Wahl der Funktion z der Variabeln x, y unabhängig wird. Das Integral $J*$ hat die Form

$$J^* = \int \{Az_x + Bz_y - C\} d\omega$$

und das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta J^* = 0$$

in dem Sinne, den die neue Fragestellung erfordert, liefert die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

d. h. wir erhalten für die Funktionen p und q der drei Variabeln x, y, z die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{(I}^*\text{)} \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial (pF_p + qF_q - F)}{\partial z} = 0\,.$$

Fügen wir zu dieser Differentialgleichung noch die aus den Gleichungen

$$z_x = p(x, y, z), \quad z_y = q(x, y, z)$$

resultirende partielle Differentialgleichung

$$\text{(I}^*\text{)} \qquad p_y + qp_z = q_x + pq_z$$

hinzu, so stehen die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (I) für die Funktion z der zwei Veränderlichen x, y und das simultane System der zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (I*) für die zwei Funktionen p und q der drei Veränderlichen x, y, z zu einander genau in der analogen Beziehung, wie vorhin im Falle eines einfachen Integrals die Differentialgleichungen (1) und (1*).

Wegen der Unabhängigkeit des Integrals J^* von der Wahl der Integrationsfläche z folgt:

$$\int \{F(p,q) + (z_x - p)F_p(p,q) + (z_y - q)F_q(p,q)\} d\omega = \int F(\bar{z}_x\,, \bar{z}_y d\omega\,,$$

wenn wir das Integral rechter Hand auf einer Integralfläche $\bar{z}$ der partiellen Differentialgleichungen

$$\bar{z}_x = p(x,y,\bar{z}), \quad \bar{z}_y = q(x,y,\bar{z})$$

genommen denken und mit Hülfe dieser Formel gelangen wir dann sofort zu der Formel

$$\text{(IV)} \qquad \int F(z_x\,, z_y) d\omega - \int F(\bar{z}_x\,, \bar{z}_y) d\omega = \int E(z_x\,, z_y\,, p, q) d\omega$$

$$E(z_x\,, z_y\,, p, q) = F(z_x\,, z_y) - F(p,q) - (z_x - p)F_p(p,q) - (z_y - q)F_p(p,q),$$

die für die Variation der Doppelintegrale die nämliche Rolle spielt, wie die vorhin angegebene Formel (4) für die einfachen Integrale und mit deren Hülfe wir wiederum die Frage beantworten können, inwiefern die JACOBIsche Bedingung im Verein mit der WEIERSTRASSschen Bedingung $E > 0$ für das Eintreten eines Minimums notwendig und hinreichend ist.