19. Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch?

David Hilbert

Eine der begrifflich merkwürdigsten Thatsachen in den Elementen der Theorie der analytischen Functionen erblicke ich darin, daß es partielle Differentialgleichungen giebt, deren Integrale sämtlich notwendig *analytische* Functionen der unabhängigen Variabeln sind, die also, kurz gesagt, nur analytischer Lösungen fähig sind. Die bekanntesten partiellen Differentialgleichungen dieser Art sind die Potentialgleichung

$$\frac{\partial d^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

und gewisse von PICARD[1] untersuchte lineare Differentialgleichungen, ferner die Differentialgleichung

$$\frac{\partial d^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f \ ,$$

die partielle Differentialgleichung der Minimalfläche und andere. Die Mehrzahl dieser partiellen Differentialgleichungen haben als Merkmal miteinander gemein, daß sie die LAGRANGEschen Differentialgleichungen gewisser Variationsprobleme sind und zwar solcher Variationsprobleme

$$\int\int F(p,q,z;x,y)dxdy = \text{Minimum}, \qquad \left[p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

bei denen für alle in Frage kommenden Argumente die Ungleichung

$$\frac{\partial d^2 F}{\partial p^2} \quad \frac{\partial d^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial d^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0$$

gilt, während F selbst eine analytische Function ist. Wir wollen ein solches Variationsproblem ein *reguläres* Variationsproblem nennen. Die regulären Variationsprobleme sind es vornehmlich, die in der Geometrie, Mechanik und mathematischen Physik eine Rolle spielen, und es liegt die Frage nahe, ob alle Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig *analytische* Functionen sein müssen, *d. h. ob jene* LAGRANGE*sche partielle Differentialgleichung eines regulären Variationsproblems die Eigenschaft hat, daß sie nur analytische Integrale zuläßt* – selbst wenn man, wie bei dem DIRICHLETschen Potentialprobleme, der Function irgend welche stetige, aber nicht analytische Randwerte aufzwingt.

Ich bemerke noch, daß es beispielsweise Flächen von *negativer* constanter GAUSSscher Krümmung giebt, die durch stetige und fortgesetzt differenzirbare, aber nicht analytische Functionen dargestellt werden, während wahrscheinlich jede Fläche von *positiver* constanter GAUSSscher Krümmung stets notwendig eine analytische Fläche sein muß. Bekanntlich stehen ja auch die Flächen positiver

[1] Journal de l'École Polytechnique 1890.

constanter Krüummung in engster Verbindung mit dem regulären Variationsproblem, durch eine geschlossene Raumcurve eine Fläche kleinsten Flächeninhaltes zu legen, die mit einer festen Fläche durch die nämliche Raumcurve ein gegebenes Volumen abschließt.