

Dr. Cohn-Vossen

Differentialgeometrie

S.S. 1930

Literatur

- Blaschke: Differentialgeometrie  
Duschak: Differentialgeometrie  
Bianchi: Differentialgeometrie  
Darboux: Theorie generale des surfaces.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.....	1
I. Abschnitt: Gestaltlehre	
1. Kapitel: Die Gestaltlehre der Raumkurven.....	6
§ 1: Die Tangente.....	6
§ 2: Die Schmiegee Ebene.....	8
§ 3: Die sphärische Abbildung einer Raumkurve.....	10
§ 4: Die Bogenlänge.....	11
§ 5: Krümmung und Windung.....	14
§ 6: Die Formeln von Frenet.....	15
§ 7: Krümmung und Windung als Funktionen der Bogenlänge.....	19
§ 8: Krümmung und Windung als Funktionen eines beliebigen Parameters.....	22
§ 9: Anwendung auf die kubische Raumkurve.....	23
§ 10: Die Schraubenlinie.....	24
§ 11: Die Näherungsprojektionen der Raumkurve auf die Ebenen des Frenetschen Dreikants.....	25
2. Kapitel: Die Gestaltlehre der Regelfläche.....	28
§ 12: Definition der Regelfläche.....	28
§ 13: Geometrische Begriffe.....	29
§ 14: Die Gleichung des Kehlpunktes und der Kehllinie.....	30
§ 15: Der Drall.....	32
§ 16: Die Torse.....	34
3. Kapitel: Einparametrische Scharen von Ebenen.....	36
§ 17: Definitionen.....	36
§ 18: Die Charakteristik.....	38
§ 19: Die Rückkehrkante.....	40
4. Kapitel: Streifen.....	43
§ 20: Definitionen der Streifen.....	43
§ 21: Schmiegungsstreifen, Krümmungsstreifen und geodätische Streifen.....	46
§ 22: Der Krümmungsstreifen.....	46
§ 23: Der Satz von Joachimsthal.....	47
II. Abschnitt: Flächentheorie	
Kapitel : Kurven auf Flächen, Tangentialebene, Linienelement und Flächenelement.....	50
§ 24: Darstellung einer Fläche.....	50
§ 25: Kurven auf Flächen, Tangentialebene.....	51
§ 26: Anwendung auf die Theorie der Regelfläche.....	53
§ 27: Die erste Fundamentalform.....	54
§ 28: Anwendung auf die Theorie der abwickel- baren Flächen.....	56
§ 29: Das Flächenintegral.....	57
2. Kapitel: Krümmungen der Schnitte einer Fläche und die zweite Fundamentalform.....	59
§ 30: Der Verteilungssatz von MEUSNIER.....	59
§ 31: Die zweite Grundform und ihre Polarform.....	61
§ 32: Anwendung auf die Theorie der Streifen.....	64
§ 33: Einführung eines tangierenden Koordinaten- systemes.....	68
§ 34: Die DUPINsche Indikatrix.....	69
§ 35: Der EULERSche Satz.....	72
§ 36: Die mittlere und die GAUSSische Krümmung.....	74
§ 37: Anwendung auf ausgezeichnete Richtungen.....	77
§ 38: Beispiele (Translationsflächen).....	78
§ 39: Torse und Zylinder als Regelflächen mit verschwindender GAUSSischer Krümmung.....	80
§ 40: Allgemeine Untersuchungen an Flächen mit verschwindender GAUSSischer Krümmung.....	82
§ 41: Krümmungsrichtungen.....	85
§ 42: Winkeltreue Abbildungen.....	89

3. Kapitel: Die sphärische Abbildung.....	90
§43: Abbildung einer beliebigen Fläche auf eine konvexe Fläche.....	90
§44: Die Abbildung einer Fläche auf die Einheitskugel.....	97
III. Abschnitt: Linienkongruenzen.....	108
§45: Analytische Fassung.....	108
§46: Brennflächen.....	110
§47: Die Hauptdralle und ihre Bedeutung für den Drall beliebiger Richtung und den Kehlpunktsabstand.....	113
§48: Normalsysteme.....	117
§49: Der Satz von Malus.....	119
IV. Abschnitt: Integration der Krümmungsgrößen.....	121
§50: Lösung eines Systemes von $n$ linearen Differentialgleichungen.....	121
§51: Anwendung auf die Integration einer Raumkurve nach den Frenetschen Formeln.....	127
2. Kapitel: Integrationstheorie der Flächen und Linienkongruenzen.....	130
§52: Verallgemeinerung des Vektordreiecks.....	130
§53: Uebergang zu mehrparametrischen Systemen.....	133
§54: Zurückführung der skalaren Produkte $\xi_i \xi_j$ auf die Fundamentalgrößen.....	137
§55: Die Gaussischen Ableitungsformeln.....	139
V. Abschnitt: Geometrie auf einer Fläche.....	140
§56: Das Gaussische Theorema egregium.....	140
§57: Die geodätische Krümmung.....	145
§58: Geodätische Linien.....	153
§59: Ableitung der geodätischen Linie aus einem Variationsprinzip.....	162
§60: Ein Satz über die Gaussische Krüm- mung.....	167
§61: Die Gauss-Bonnetsche Formel.....	170
§62: Folgerungen aus der Gauss-Bonnetschen Formel.....	184
§63: Geometrie im Grossen.....	186
1.) Das Integral der Krümmung auf der Kugel.....	186
2.) Topologische Verallgemeinerung.....	187
3.) Ringflächen.....	188
4.) Brezel- oder Henkelflächen.....	190
2. Kapitel: Abbildungen der Flächen aufeinander.....	191
§64: Gaussische Koordinaten.....	191
§65: Die geodätische Abbildung.....	196
§66: Die winkeltreue Abbildung.....	204
§67: Anwendung auf die Abbildung einer Ebene.....	215
§68: Poincares Abbildung der Fläche der Gaussischen Krümmung $-1$ auf die Halbebene.....	216
§69: Der geodätische Abstand auf Flächen der Gaussischen Krümmung $-1$ .....	221
§70: Die Differentialoperatoren von Beltrami.....	237
3. Kapitel: Minimalflächen.....	243
§71: Die Minimalflächen als Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung.....	243
§72: Minimalflächen als Flächen konformer Abbildung.....	247
§73: Weitere Sätze über Minimalflächen.....	249

VI. Abschnitt: Riemannsche Geometrie.....254

1. Kapitel: Grundlagen.....254

    §74: Die Relativmetrik.....255

    §75: Das infinitesimale Uebertragungsprinzip.....257

2. Kapitel: Der Tensorkalkül.....1.....265

    §76: Kontravariante und kovariante Vektoren.....265

    §77: Definition und Eigenschaften der Tensoren.....269

    §78: Die Ueberschiebung.....272

    §79: Formale Fassung der Riemannschen Postulate.....274

    §80: Die kovariante Ableitung.....280

    §81: Der Riemannsche Krümmungstensor.....285

    §82: Riemannsche Normalkoordinaten.....288

Schlussbetrachtung: Zusammenhänge der Riemannschen Geometrie mit der modernen Physik.....290

\*\*\*\*\*

EINLEITUNG:

Die Differentialgeometrie hat im Gegensatz zur analytischen Geometrie eine Reihe nebeneinander herlaufender Gebiete. Die gewöhnliche Geometrie betrachtet Gebiete in ihrer Gesamtheit, einheitliche Begriffe, die nicht in einzelne Teile zerfallen. Die Differentialgeometrie demgegenüber befasst sich mit Gebilden, die nicht in ihrer Gesamtheit vorliegen und die eine unregelmässige Struktur haben können. Als Beispiel führen wir die Kurve, die ein Skiläufer im Schnee zieht, an. Er weiss nicht, wo er sein wird, er weiss nur, welche Geschwindigkeit und welche Richtung er hat. Er spürt auch unter Umständen, wenn er eine scharfe Kurve macht. Er hat die Möglichkeit, im Augenblick zu sehen, was mit ihm geschieht, weiss aber nicht, was die Zukunft bringt, und erinnert sich auch nicht mehr ganz an die Vergangenheit. Das ist der Gedankengang, von dem die Differentialgeometrie ausgeht.

Ganz analog liegen die Verhältnisse, wenn man Flächen betrachtet. Die Differentialgeometrie beschäftigt sich etwa mit einem Berge. Man weiss nicht von einer grösseren Umgebung, man kennt nur die nächste Umgebung und die Steigung. Der eine Berg weiss vom andern nichts. Wir kommen also in der Differentialgeometrie zu einer **Gestaltlehre der unregelmässigen Gebilde**. Wie ist es denn möglich, eine solche unregelmässige Kurve oder Fläche dennoch mathematisch zu beschreiben? Was ist da das Prinzip der Sache? Die Differentialgeometrie beginnt da, wo die Differentialrechnung aufhört, nämlich bei der Ersetzung eines komplizierten Gebildes durch ein einfaches. Sie geht davon aus, dass man eine Kurve in der Umgebung eines Punktes ersetzt durch das einfachste Gebilde, die gerade Linie, dass man von der Frage ausgeht: welche gerade Linie charakterisiert die Kurve am besten? Diese Fragestellung ist bereits differentialgeometrisch. Im Raume ist das entsprechende die Tangentialebene.

Man kann nun in der Ebene anstelle der Geraden ebensoviele den Kreis heranziehen und fragen: Wie sieht ein Kreis aus, der sich in einem Punkte am besten an eine Kurve anschliesst. So kommt man zum Krümmungskreis, zum Begriff der Krümmung. Die Gestaltlehre besteht in nichts weiter als dass man in einem Punkte ein gegebenes Gebilde ersetzt durch die Skala der einfachsten. Insofern tritt die analytische Geometrie in den Dienst der Differentialgeometrie. Diese Gestaltlehre bereits ist für die Flächen ausserordentlich mannigfaltig und anziehend. Bei den Flächen gibt es eine Fülle von Phänomenen. Zur Charakterisierung einer

Fläche genügt nicht etwas so einfaches wie ein Kreis. Es ist auch nicht so, dass im Raume anstelle des Kreises die Kugel tritt. Es braucht z.B. eine Bergkuppe nicht rotations-symmetrisch zu sein. Man wird einen gestreckten Körper verwenden müssen. Oder man denke an einen Engpass- Die engere Umgebung lässt sich wohl durch die Tangential-ebene beschreiben, aber für die nähere Beschreibung hat die Kugel keinen Sinn mehr. Sie reicht nicht mehr aus. Deswegen ist die Gestaltlehre der Flächen interessanter als die der Kurven. Das Prinzip der Gestaltlehre ist also die *A n n ä h e r u n g*. Auf diese Weise kommen wir zum Begriff der Tangente usw..

Nun ist das Wort Differentialgeometrie schlecht gewählt. Es sind Differential- und Integralprozesse gleichberechtigt. Man sollte daher lieber Infinitesimalgeometrie sagen. Dass Integrationsprozesse auftreten, macht folgende Uebersetzung klar: Man denke sich ein Auto, das ein Tachometer und einen Krümmungsmesser besitzt. Wenn wir mit diesem Auto ohne Karte eine Nacht herumfahren und nur Geschwindigkeit und Krümmung in jedem Punkte aufzeichnen, so ist es möglich, hinterher auf einer Karte genau den Weg anzugeben, den wir gefahren sind. Es zeigt sich, dass man aus den beiden Daten Geschwindigkeit und Krümmung in jedem Augenblicke die Kurve rekonstruieren kann. Und dazu brauchen wir die Differentialgeometrie, insbesondere Integrationsprozesse. Verknüpft mit diesen allgemeinsten Integrationsprozessen sind speziellere Probleme. Man denke etwa an einen Kreis. Der Kreis ist dadurch charakterisiert, dass er die Kurve ist, die von einem festen Punkte überall dieselbe Entfernung hat. Man kann ihn aber auch definieren als die Kurve, die in jedem Punkte dieselbe Krümmung hat. Es erhebt sich also das Problem, Krümmungsverhältnisse anzugeben. Auf diese Weise bekommt man die Schraubenlinien, Schraubenflächen und die Rotationsflächen. Das sind spezielle Typen.

Das ist die Grundlage, auf die die Differentialgeometrie aufbaut. Nun gibt es, im wesentlichen seit der Abhandlung von Gauss: (*Disquisitiones generalis circa superficies curvas* 1827) eine ganze Klasse von Problemen, welche die Mathematiker beschäftigen. Das sind die der *M a s s e - s t i m m u n g*. Sie sind erwachsen aus der Vermessung. Das Problem der Geodäsie ist folgendes: Man ist mit seinen Messinstrumenten gekettet an die Erdoberfläche, möchte aber Landkarten zeichnen und ausserdem Höhen und Tiefen richtig registrieren. Man war vor die Aufgabe gestellt; die Struktur

der Fläche durch solche Angaben zu bestimmen, die nicht davon Gebrauch machen, dass das Ganze im Raume eingebettet ist. Das war das Problem, von dem Gauss ausging. Hier tritt ein ganz anderer Begriff in Erscheinung. Welche Materialien haben wir in der Hand, solche Angelegenheit durchzuführen? Die gerade Linie gibt es da schon nicht mehr. Es müssen neue Materialien herangeschafft werden, um eine Geometrie auf der Kugel zu treiben. Dieses Grundmaterial wird geliefert durch den Begriff der *g e o d ä t i s c h e n* *L i n i e*. Das sind solche Linien, die zwei Punkte auf dem möglichst kurzen Wege verbinden. Wenn man nun mit diesen geodätischen Linien genau so arbeitet wie sonst mit Geraden, wenn es sich um Probleme in der Ebene handelt, so kommt man zu Messungsergebnissen. Man muss Dreiecke aus ihnen aufbauen und sie behandeln. Dann wird das ebene Dreieck ein Sonderfall. Es ergibt sich innerhalb einer jeden Fläche ein Analogon zur ebenen Geometrie, eine Tatsache, die schon Gauss angab, und die Riemann in aller Allgemeinheit vollendete, das Problem der *R i e m a n n s c h e n* *G e o -* *m e t r i e*. Diese Fragestellungen sind auch auf mehr als drei Dimensionen angewendet worden. Dort lassen sich die Begriffe mit derselben Leichtigkeit oder Schwierigkeit entwickeln wie in der Ebene und im Raume. Praktische Bedeutung hat diese Geometrie erlangt in der *a l l g e -* *m e i n e n* *R e l a t i v i t ä t s t h e o r i e*. Nun besteht zwischen den beiden Gebieten, der Gestaltlehre und der Massbestimmung, eine Zwischendisziplin, die besonders interessant ist, die *B i e g u n g s l e h r e*.

Wenn man eine Metallmembran hat, die hinreichend dünn ist, die etwa ein Stück der Jugeloberfläche ist, so kann man sie nicht auf der Ebene ausbreiten. Im Raume kann man sie aber beliebig verdrehen und verbiegen. Da entsteht das Problem: Gegeben ist ein Flächenstück. Gesucht sind alle möglichen Gestaltungsmöglichkeiten, welche die Fläche im Raume einnehmen kann. Diese Biegelhre ist besonders interessant und schwierig.

Nun schliessen sich zwanglos weitere Gebiete an, zunächst einmal *E x t r e m a l p r o b l e m e*. Bei dem Begriff der geodätischen Linie sind wir zum ersten male auf die Aufgabe gestossen, eine Kurve zu finden, die zwei Punkte auf die kürzeste Weise verbindet. Das ist schon ein *e x t r e m a l e* Forderung, ein *Extremalproblem*. Solche Probleme scheinen dieser Formulierung nach nichts mit dem zu tun zu haben, was wir hier treiben werden. Der Grund, weswegen sie aber dennoch hierher gehören, ist nicht schwierig anzugeben.



Wir sagten, dass es sich in der Differentialgeometrie um einen Punkt und seine Umgebung handelt. hier haben wir doch offenbar zwei Punkte, die verbunden werden sollen. Es ist nun aber eine geodätische Linie auch geodätische Linie für zwei beliebige Punkte auf ihr. Das lässt sich leicht beweisen. Und da haben wir sofort Differentialprobleme vor uns.

Ein bekanntes Beispiel für derartige Probleme ist das isoperimetrische Problem. In der Ebene lässt es sich so formulieren: Gegeben sei ein geschlossener Faden, den ich so legen soll, dass er möglichst viel Fläche umspannt. Man wird sich schon denken, dass der Kreis die Lösung sein wird. Im Raum heisst das entsprechende Problem: Wenn ich eine Gummiblase so prall wie möglich mit Wasser fülle, dann nimmt die eine bestimmte, zu untersuchende Gestalt an.

Ein weiteres berühmtes Beispiel ist das sogenannte Minimalflächenproblem. Es handelt sich dabei um Flächen, wie sie etwa eine Seifenhaut einnimmt, die man in einen geschlossenen, krummlinigen Draht einspannt. Sie sucht wegen der Kohäsionskräfte eine möglichst kleine Oberfläche einzunehmen. Und diese Minimalflächen haben die Eigenschaft, dass sie auch Minimalflächen sind für eine beliebige geschlossene Kurve, die ich auf ihnen ziehe. Das ergibt ebenfalls Differentialforderungen.

Endlich gehören zur Differentialgeometrie Probleme im Grossen. Wir haben ja schon gesagt, dass neben Differentialprobleme auch Integrationsprozesse treten können. Das einfachste Problem dieser Art ist das Geschlossenheitsproblem. Denken wir uns wieder das schon erwähnte Auto und fragen nach den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit das Auto wieder an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt. Analoge Probleme lassen sich noch vielerlei angeben. Besonders wichtig sind bei diesen Problemen im Grossen wieder die geodätischen Linien. Das Problem geschlossener geodätischer Linien ist besonders wichtig geworden, weil es die Brücke zwischen Differentialgeometrie und Mechanik darstellt. Extremalprobleme sind ja charakteristisch für die Mechanik. Wir sagten ja schon, dass die Riemannsche Geometrie ihre Anwendung in der relativistischen Mechanik fand. Es sind ja die geodätischen Linien nichts anderes als die Bahnen physikalischer Körper bei kräftefreier Bewegung. Und da ist sehr wichtig, ob der Körper eine geschlossene Bahn durchläuft oder nicht. Da taucht schon das Problem der geschlossenen geodätischen Linie auf. Es ist eines der

schwierigsten und allgemein noch nicht gelöst.

Es gibt auch noch andere Probleme, die sich an die Biegelehre anschliessen. Wir sprachen schon von einem Stück Metallfläche, dessen Verbiegungskonstitutionen wir untersuchen würden. Etwas anderes ist es nun, wenn man eine ganze Kugel aus einer dünnen Metallmembran herstellt. Es zeigt sich, dass sie nicht verbiegbar ist. Dadurch, dass wir die Kugel als Ganzes nehmen, ist die Verbiegbarkeit verlorengegangen. Auch diese Verbiegbarkeit geschlossener Flächen ist eines der klassischen Probleme im Grossen.

Damit haben wir die Uebersicht über die Probleme der Differentialgeometrie gegeben.

Alle diese Gebiete werden umspannt von einem grossen Prinzip, das ausserordentlich verwickelt ist, nämlich von dem Prinzip der *I n v a r i a n t e n t h e o r i e*. Alle die Begriffe, von denen ich redete, Krümmung, Biegung usw. haben einen analytischen Ausdruck in Formeln. Das Charakteristische an diesen Formeln ist nun, dass sie ihre Gestalt nicht ändern, wenn man das Koordinatensystem einer Änderung unterwirft, denn die Krümmung z.B. hat ja nichts mit der Orientierung des Koordinatensystems zu tun. Man trifft also auf Formeln, die eine tiefliegende algebraische Eigenschaft haben, nämlich die, gegenüber irgendwelcher Transformationen des Koordinatensystemes invariant zu sein. Man nennt diese Grössen *D i f f e r e n t i a l i n - v a r i a n t e n*. Die Invariantentheorie selbst zerfällt wiederum in mehrere Kategorien. In der Differentialgeometrie ist es besonders bequem, die Bewegung und Spiegelung heranzuziehen. In neuerer Zeit schliessen sich daran die *a f f i n e*, *p r o j e k t i v e* und die *k o n f o r m e G e o m e t r i e*.

Es gibt nun noch ganz andere Gebilde, mit denen sich die Differentialgeometrie befasst, das sind *L i n i e n s y - s t e m e*, etwa die Lichtstrahlen, die von einer Quelle ausgehen und an verschiedenen krummlinigen Spiegeln reflektiert werden. Sie werden am Schlusse wieder ein System von Linien bilden. Und es erweist sich für viele Zwecke als sinnvoll, auch derartige Geradensysteme, entsprechend auch Systeme von Kugeln usw. zu betrachten.

I. ABSCHNITT.GESTALTLEHRE!1. Kapitel:Die Gestaltlehre der Raumkurven.

## §1:

Die Tangente;

Was wir in diesem Kapitel behandeln wollen, ist nicht die vollständige Theorie, sondern nur das Einfachste von den Dingen, die wir später als Probleme im Grossen noch weiter ausführen werden.

Es sei uns eine Raumkurve gegeben durch einen Vektor  $\vec{\rho}(t)$ , der vom Parameter  $t$  abhängt. Man denke sich vielleicht gleich einen Punkt, der mit der Zeit eine Kurve durchläuft. Von dieser Kurve wollen wir voraussetzen, dass sie alle die Eigenschaften besitzt, die wir brauchen, also mehrmals stetig differenzierbar ist usw.

Wir denken unsere Betrachtungen immer nur auf die Umgebung eines Punktes beschränkt. Der Punkt durchläuft ein kleines Stückchen einer Raumkurve, und für dieses Stück interessieren wir uns. Da muss man vorsichtig sein. Wenn man da ganz willkürlich die Komponenten des Vektors angibt, so kann der Punkt ein Verhalten zeigen, das von dem üblichen und erwünschten abweicht. So ist ja z. B. die Konstante auch eine Funktion. Sie hat aber als geometrisches Bild nur einen einzigen Punkt, und den wollen wir nicht als Kurve betrachten. Dann könnte auch das Unglück passieren, dass an einer einzigen Stelle die Ableitung verschwindet, dann würde der Punkt nicht über diese Stelle hinausrücken können. Das wollen wir also auch ausschliessen. Wir setzen also

$$(1; 1) \quad \dot{\vec{\rho}}(t) \neq 0$$

Mit dem Falle, dass diese Gleichung nicht erfüllt ist, werden wir uns noch später zu beschäftigen haben.

Damit haben wir schon eine differentialgeometrische Erkenntnis gewonnen. Wir sagten schon, dass die Gestaltlehre darin besteht, dass man kompliziertere Gebilde auf einfache zurückführt. Das einfachste ist nun offenbar, an eine Kurve in einem Punkte die Tangente zu ziehen. Dazu denken wir uns zwei Werte des Parameters  $t$ , nämlich  $t$  und  $t+h$  und die beiden dazu gehörigen Kurvenpunkte ins Auge gefasst. Wir verbinden diese beiden Punkte durch eine Gerade, halten nun  $t$  fest und lassen  $h$  gegen Null gehen. Die Frage ist nun, gegen welche Grenzlage die Gerade geht, wenn  $h$  verschwindet. Die Gerade dreht sich um den Punkt  $t$ .

Wenn sie eine Grenzlage für  $h=0$  besitzt, so bezeichnen wir diese Grenzlage als die **T a n g e n t e** an die Kurve im Punkte  $t$ . Wir bestimmen zunächst die Steigung der Sekante für  $h \neq 0$ . Man gewinnt sie, indem man die Differenz der Ortsvektoren der beiden Punkte  $t$  und  $t+h$  voneinander subtrahiert und durch  $h$  dividiert:

$$(1;2) \quad \frac{\Delta \xi}{h} = \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}$$

Lassen wir nun  $h$  gegen Null gehen, so erhalten wir

$$(1;3) \quad \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} \longrightarrow \dot{\xi}(t)$$

denn wenn wir uns den Grenzübergang für die einzelnen Komponenten von  $\xi$  durchgeführt denken, so streben sie nach den elementaren Sätzen der Differentialrechnung gegen die Komponenten eines Vektors, die ihre Ableitungen sind. Dieser Vektor  $\dot{\xi}(t)$  ist als von Null verschieden vorausgesetzt, also strebt in der Tat die Sehne gegen eine wohlbestimmte Lage, die wir die der Tangente nennen. Dann wird die Gleichung dieser Tangente

$$(1;4) \quad \xi(\lambda) = \xi + \lambda \dot{\xi}$$

wobei  $\lambda$  der Parameter auf der Tangente ist.

Dem Vektor  $\dot{\xi}$  interessiert uns nur die Richtung, nicht die Grösse. Wenn wir dagegen Physik treiben, also einen sich in der Zeit bewegenden Punkt betrachten, dann wird uns auch die Geschwindigkeit interessieren. Für uns aber ist die Bewegung in der Zeit nur eine Metapher.

Wir wollen nun untersuchen, was geschieht, wenn wir  $t$  durch einen anderen Parameter ersetzen, etwa setzen

$$(1;5) \quad t = \varphi(\tau)$$

Dann hängen die Ableitungen nach dem neuen Parameter  $\tau$  mit denen nach  $t$  zusammen durch die Gleichung

$$(1;6) \quad \frac{dx_i}{d\tau} = \xi_i \frac{dt}{d\tau}$$

oder

$$(1;7) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \dot{\xi} \frac{dt}{d\tau}$$

Wir sehen also, dass für die Vektoren dieselben Differentiationsgesetze gelten wie für Skalare. Es interessiert ~~xxxx~~ uns nun also die Länge des Vektors  $\dot{\xi}$  nicht, weil sie

vom Parameter abhängt. Und wir wollen in dieser Beziehung, bei der Wahl des Parameters freie Hand haben.

§2:

Die Schmiegebene.

Die nächst einfache Art, die Umgebung eines Raumkurvenpunktes zu beschreiben, ist, dass wir ausser dem betrachteten Punkte noch zwei Nachbarpunkte ins Auge fassen. Da denken wir sofort an eine Ebene, die wir mit der Kurve in Beziehung setzen. Da gibt es aber schon etwas nachzudenken. Drei benachbarte Punkte einer Raumkurve bestimmen eine Ebene. Wenn ich den einen von ihnen festhalte, die andern beiden gegen ihn rücken lasse, dann ist es gar nicht nötig, dass diese drei Punkte eine Ebene bestimmen, sie tun es z.B. nicht, wenn sie in einer Geraden liegen. Wir müssen also hoffen, dass die Punkte aufeinander rücken können, ohne dass sie dabei in eine Gerade zu liegen kommen. Und das wird im allgemeinen der Fall sein, denn eine Kurve ist in einen Polygonenzug zerlegbar, und da werden die einzelnen Polygonenseiten endliche Winkel einschliessen. Wir werden also im allgemeinen annehmen, dass drei "konsekutive" Punkte einer Raumkurve eine Ebene bestimmen. Denken wir uns etwa den mittleren Punkt  $t$  festgehalten. Dann bestimmen also die drei Punkte  $t, t+h, t-h$  eine Ebene. Lassen wir nun  $h$  gegen Null gehen, so wird die Grenzlage der Ebene, die im allgemeinen existieren wird, die Schmiegebene genannt. Dabei werden die beiden Sehnen, die die Schmiegebene aufspannen, in der Grenze in die Tangente im Punkte  $t$  übergehen. Wir können also auch sagen: Die Schmiegebene wird von zwei konsekutiven Raumkurventangenten aufgespannt.

Es sind uns also zwei Tangenten  $f'(t)$  und  $f'(t+h)$  gegeben und wir suchen die Ebene, die von diesen beiden Vektoren aufgespannt wird. Ebensogut könnte man die Ebene durch die beiden Vektoren  $f'(t)$  und  $f'(t+h) - f'(t)$  bestimmen. Dividieren wir durch  $h$ , so sehen wir, dass die Ebene durch  $f''$  bestimmt wird. Wir sehen also, dass die Schmiegebene von den beiden Vektoren  $f'$  und  $f''$  aufgespannt wird. Wir wissen nun, dass wenn zwei Vektoren  $a$  und  $b$  eine Ebene aufspannen, gelten muss

$$(2; 1) \quad (a, b, c) = 0$$

wobei  $c$  ein Vektor in dieser Ebene ist.

Wenn also  $\eta$  der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene ist, so haben wir also nur auszudrücken, dass der Vektor  $\eta - \zeta$  in der Ebene selbst liegt. Wir erhalten also als Gleichung der Schmiegebene

$$(2;2) \quad (\eta - \zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}) = 0$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass  $\dot{\zeta}$  und  $\ddot{\zeta}$  nicht einander parallel sind.

Wir können auch auf einem mehr formalen Wege auf die Betrachtung der Schmiegebene geführt werden. Wir haben gesagt, dass man sich die Schmiegebene aus zwei benachbarten Tangenten aufgespannt denken kann. Diese Definition können wir durch eine formaleren ersetzen. Wir haben schon untersucht, wie sich der Geschwindigkeitsvektor bei einer Parametertransformation ändert. Jetzt stellen wir dieselbe Frage für  $\ddot{\zeta}$ , den Beschleunigungsvektor. Wir werden sehen, dass hier die Transformation des Parameters weitertragend ist. Es wird

$$(2;3) \quad \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\zeta}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \dot{\zeta} \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{\zeta} \frac{dt}{d\tau} \right) \frac{dt}{d\tau}$$

Nun wenden wir die Formel für die Differentiation des Produktes aus einem Vektor und einem Skalar an:

$$(2;4) \quad (\lambda \zeta)' = \lambda' \zeta + \lambda \zeta'$$

Dann folgt also aus (2;3)

$$(2;5) \quad \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = \dot{\zeta} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \dot{\zeta} \frac{dt}{d\tau} \frac{d^2 t}{d\tau^2}$$

Setzen wir

$$(2;6) \quad \frac{dt}{d\tau} = \alpha$$

so wird also

$$(2;7) \quad \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = \ddot{\zeta} \alpha^2 + \dot{\zeta} \alpha \frac{d\alpha}{d\tau}$$

- Es setzt sich also die zweite Ableitung nach  $\tau$  linear aus den ersten Ableitungen nach  $t$  zusammen. Es ändert sich also bei einer Parametertransformation nicht nur die Grösse, sondern auch die Richtung des Beschleunigungsvektors. Seine Richtung ist nicht invariant, ändert man also den Parameter der Kurve, so ändert der Beschleunigungsvektor

seine Richtung, er durchläuft die Schmiegeebene.

Um die Geometrie der Kurven klar zu erfassen, führen wir Einheitsvektoren ein.  $\xi_1$  sei der Einheitsvektor in Richtung der Tangente,  $\xi_3$  ein Vektor, der die Länge 1 und die Richtung senkrecht zur Schmiegeebene hat. Man nennt ihn den Einheitsvektor der *B i n o r m a l e n*. Endlich sei  $\xi_2$  der Einheitsvektor senkrecht zu Tangente und Binormale. Man nennt  $\xi_2$  den Einheitsvektor der *H a u p t n o r m a l e n*. Damit haben wir also ein Dreikant aus paarweise orthogonalen Vektoren.

Offenbar liegt die Hauptnormale in der Schmiegeebene, denn sie steht senkrecht auf der Binormalen, die ihrerseits senkrecht auf der Schmiegeebene steht. Es ist also die Hauptnormale das Lot auf die Tangente in der Schmiegeebene. Diese Konstruktion von drei Vektoren  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  kann man sich für jeden Punkt der Kurve ausgeführt denken, Dann erhält man ein Dreikant, das die Kurve begleitet. Man nennt es das *b e g l e i t e n d e D r e i k a n t* der Kurve. Es enthält nichts mehr von einer speziellen Parameterwahl.

### §3:

#### Die sphärische Abbildung einer Raumkurve.

Wir wollen nun das geometrische Bild, das wir von der Raumkurve schon gewonnen haben, noch vervollständigen durch den Begriff der sphärischen Abbildung. Wir denken uns irgendwo im Raume eine Kugel vom Radius 1. Man nennt sie die *Gaussische Einheitskugel*. Ausserdem betrachten wir unsere Raumkurve. Tragen wir etwa  $\xi_1$ , den Tangenteinheitsvektor der Raumkurve, vom Mittelpunkte der Kugel ab, so durchläuft er eine bestimmte Kurve auf der Kugel. Diese Kurve nennt man das *T a n g e n t e n b i l d* der Raumkurve, das also in eindeutiger Weise der Raumkurve zugeordnet ist. Auf ganz entsprechende Weise erhalten wir mittels  $\xi_2$  und  $\xi_3$  das *H a u p t n o r m a l e n b i l d* und das *B i n o r m a l e n b i l d* der Kurve.

Diese sphärischen Bilder einer Raumkurve erlauben allein schon gewisse Aussagen über die Kurve. So erkennt man z.B. die Tatsache, dass man es mit einer ebenen Raumkurve zu tun hat, daran, dass das Tangentenbild der Kurve ein grösster Kreis und das Binormalenbild ein einziger Punkt, nämlich der Pol dieses Kreises, ist. Das Hauptnormalenbild fällt dann mit dem Tangentenbild zusammen.

Bei einer Geraden ist das Tangentenbild ein Punkt und Haupt- und Binormalenbilder sind unbestimmt, weil

man der Geraden nicht eine Schmiegeebene eindeutig zuordnen kann.

Im Allgemeinen ändert sich nun bei einer Raumkurve sowohl Tangente als auch Schmiegeebene, und das prägt sich in der Abbildung aus. Wenn wir ein Bogenelement der Raumkurve durchlaufen, dann dreht sich bei der Abbildung der Vektor  $\xi_1$  um den Mittelpunkt der Einheitskugel, und es läuft der Tangentenbildpunkt auf der Kugel. Es ist also, da das Tangentenbild sich umso schneller bewegt, je stärker die Raumkurve gekrümmt ist, die Geschwindigkeit des Tangentenbildes ein Mass für die Krümmung der Raumkurve. Entsprechend ist die Änderung der Schmiegeebene angegeben durch die Geschwindigkeit des Binormalenbildes. Wir haben also nur das Bogenelement des Binormalenbildes durch das entsprechende Element der Raumkurve zu dividieren und bekommen die *W i n - d u n g* der Raumkurve, wie wir in dem Quotienten aus Tangentenbildelement und Raumkurvenelement die *K r ü m m u n g* der Raumkurve bekommen.

Wir sagten schon, dass bei einer Geraden die Abbildungsverhältnisse singular werden. Es kann sich nun auch eine beliebige Kurve an einer Stelle, nämlich an einem Wendepunkte, wie eine Gerade verhalten. Dann ist es aber immer durch einen Grenzübergang möglich, Binormalenbild und Hauptnormalenbild zu ermitteln.

§5:

#### Die Bogenlänge.

Das erste, was wir nun an einer Kurve *m e s s e n*, ist die Bogenlänge. Sie wird definiert als der, wenn vorhandene Grenzwert der Bogenlänge des Polygons, das wir der Kurve einbeschreiben. Wir betrachten nun also nicht mehr einen einzigen Punkt der Raumkurve, sondern ein ganzes Intervall  $a \leq t \leq b$  und betrachten die konsekutiven Punkte, die zu diesen Werten von  $t$  gehören. Die Punkte des Polygons entsprechen den Parameterwerten  $t_i$ . Dann wird die Länge einer Sehne des Polygons

$$(5;1) \quad l_i = |\xi_i - \xi_{i-1}|$$

wobei

$$\xi_i = \xi(t_i)$$

gesetzt ist. Wir setzen nun

$$(5;2) \quad t_i - t_{i-1} = h$$

Ferner denken wir die einzelnen Punkte *äquidistant*,



um die Rechnung zu erleichtern. Dann ist

$$(5;3) \quad \sum_i |\zeta_i - \zeta_{i-1}| = h \sum_i \left| \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{h} \right|$$

Die einzelnen Ausdrücke in der Summe auf der rechten Seite gehen in der Grenze  $h=0$  gegen die Differentialquotienten  $\zeta'_i$  an der Stelle  $t_i$ . Es wird daher zu erwarten sein, dass

$$(5;4) \quad \sum_i \left| \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{h} \right| \rightarrow \int_a^t |\zeta'(t)| dt$$

Diese Formel ist zu beweisen. Wir müssen abschätzen, wie schnell bei abnehmendem  $h$  der einzelne Summand gegen  $\zeta'$  geht. Der einzelne Summand konvergiert gegen den Integranden. Es kommen aber beim Grenzübergang immer mehr Glieder hinzu. Wir müssen also einen Rest abschätzen. Dabei werden wir zum erstenmale eine Abweichung der Rechnung mit Vektoren von der mit Skalaren bemerken. Fassen wir die  $k$ -te Koordinate ins Auge,  $x_k(t+h)$ . Setzen wir die Taylorentwicklung an, so wird

$$(5;5) \quad x_k(t+h) = x_k(t) + h \dot{x}_k(t) + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_k(t+\delta h)$$

Fassen wir zu Vektoren zusammen, so wird also

$$(5;6) \quad \zeta(t+h) = \zeta(t) + h \zeta'(t) + \frac{h^2}{2} \eta$$

Der Zwischenwert ist nicht für alle Vektoren derselbe. Ich kann also das Restglied nur zu einem Vektor  $\eta$  zusammenfassen. Es stimmt also die Taylorentwicklung mit einem Restglied nicht mehr für Vektoren. Das hat auch eine anschauliche Erklärung. Bei einer ebenen Kurve sagt die Restgliedformel aus, dass es zu jeder Stelle eine parallele Tangente in demselben Intervall der Kurve gibt. Und das ist im Allgemeinen im Raume nicht mehr der Fall.

Wir wissen nun aber, dass  $\eta$  in dem ganzen betrachteten Intervall beschränkt ist, wenn wir nur voraussetzen, dass  $\zeta''$  in dem ganzen Intervall beschränkt ist. Nun schätzen wir ab. Wir sollen die Differenz  $\zeta_i - \zeta_{i-1}$  vergleichen mit  $\zeta'_i$ . Zu dem Zwecke dividieren wir (5;6) durch  $h$  und bekommen

$$(5;7) \quad \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{h} = \zeta'_i + \frac{h}{2} \eta$$

Gehen wir zu absoluten Beträgen über, so ergibt sich

$$(5;8) \quad |\dot{\gamma}_i| - \frac{h}{2} |\gamma_i| \leq \left| \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{h} \right| \leq |\dot{\gamma}_i| + \frac{h}{2} |\gamma_i|$$

Summieren wir und multiplizieren mit  $h$ , so ergibt sich

$$(5;9) \quad h \sum_{i=1}^n |\dot{\gamma}_i| - \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \leq S_h \\ \leq h \sum_{i=1}^n |\dot{\gamma}_i| + \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^n |\gamma_i|$$

wobei

$$(5;10) \quad S_h = h \sum_{i=1}^n \frac{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|}{h}$$

der Ausdruck ist, den wir abschätzen wollen. Gehen wir zur Grenze  $h=0$ , so gehen die linke und rechte Seite von (5;9) gegen das Integral (5;4). Wir erhalten also auch

$$(5;11) \quad S_h \rightarrow \int_a^t |\dot{\gamma}(t)| dt = s$$

Durch diese Gleichung wird die Bogenlänge  $s$  definiert. Sie ist also in der Tat der Grenzwert der Polygonsehnenlänge. Gehen wir wieder zu Komponenten über, so haben wir also bewiesen

$$(5;12) \quad s = \int_a^t \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} dt$$

Führen wir nun  $s$  als Parameter ein, so wird nach (5;11)

$$(5;13) \quad \frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}|$$

Setzen wir insbesondere  $s = t$ , so erhalten wir

$$(5;14) \quad \frac{ds}{ds} = |\dot{\gamma}| = 1$$

Es ist also

$$(5;15) \quad 1 = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2$$

Wir können nun (5;14) auch in der Form schreiben

$$(5;16) \quad \dot{\gamma}'^2 = 1$$

oder

$$(5;17) \quad \dot{\gamma}' = \xi_1$$

Es wird also der Geschwindigkeitsvektor ganz von selbst

Einheitsvektor. Gleichzeitig sehen wir auch, dass, wenn wir einen von  $s$  verschiedenen Parameter wählendie absolute Länge des Geschwindigkeitsvektors gleich dem Differentialquotienten der Bogenlänge nach dem betreffenden Parameter ist.

§6:

Krümmung und Windung.

Wir haben schon das Tangentenbild einer Raumkurve definiert. Wenn die Raumkurve nun hinreichend oft differenzierbar ist, so ist es das Tangentenbild auch, nur einmal weniger. Es hat also auch eine Bogenlänge. Wir wollen sie  $\sigma$  nennen. Wir bilden nun die Ableitung der Bogenlänge des Tangentenbildes nach der der Raumkurve und setzen

$$(6;1) \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

Wir nennen  $\frac{1}{\rho}$  die Krümmung der Raumkurve. Sie ist wohl definiert, denn  $\sigma$  ist eine Funktion von  $s$ . Wir nennen  $\rho$  den Krümmungsradius.

Genau so verfahren wir mit dem Binormalenbilde. Sie habe die Bogenlänge  $\chi$ . Dann definieren wir

$$(6;2) \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\tau}$$

als die Windung. Dabei nennen wir  $\tau$  den Torsionsradius.

Wir untersuchen nun, welche anschauliche Bedeutung die Krümmung und die Windung haben. Dazu stellen wir eine heuristische Ueberlegung an. Wir haben einen Kurvenbogen und fassen zwei benachbarte Tangentialeinheitsvektoren ins Auge. Sie seien um das Stück  $ds$  voneinander entfernt. Dann entsteht das zugehörige Tangentialbild, indem wir die beiden Tangentialvektoren vom Mittelpunkte der Kugel aus antragen. Die Entfernung der dadurch auf der Kugel festgelegten Punkte sei  $d\sigma$ .  $d\sigma$  ist also der infinitesimale Winkel zwischen den beiden Vektoren. Wir kommen also zu der Erkenntnis:

Die Krümmung ist der Grenzwert des Quotienten aus dem Winkel zweier benachbarte Tangenten und der Entfernung ihrer Berührungspunkte.

Aehnlich ist es mit der Torsion. Wir denken uns zwei benachbarte Binormalen 1 und 2. Ihre Fußpunkte seien um das Stück  $ds$  voneinander entfernt. Denken wir uns wieder die Einheitsvektoren der beiden Binormalen in der Einheitskugel gezogen. Sie bilden den Winkel  $d\chi$ . Wir finden also:

Die Torsion ist der Grenzwert des Quotienten aus dem Winkel zwischen zwei benachbarten Schmiegebene und der Entfernung  $\mu$  ihrer beiden Berührungspunkte.

Die Schreibweise  $\frac{1}{\rho}$  und  $\frac{1}{\tau}$  könnte zunächst verwundern. Sie hat aber einen anschaulichen Sinn. Wenn man nämlich den Kreis vom Radius  $\rho$  betrachtet, der die Kurve in dem betrachteten Punkte berührt, so ist zu erwarten, dass man ihn erhält, wenn man durch drei benachbarte Punkte der Kurve den Kreis zieht und nun die Punkte zusammenrücken lässt.

Beim Torsionsradius kann man nicht unmittelbar von einem Kreise reden, der sich der Kurve zuordnen lässt.

§6:

Die Formeln von Frenet.

Wir wollen die Ableitungen der Vektoren  $\xi_1, \xi_2$  und  $\xi_3$  aus den drei Vektoren selbst zusammensetzen. Das können wir offenbar, weil ja die drei Vektoren  $\xi_1, \xi_2$  und  $\xi_3$  ein rechtwinkliges Koordinatensystem bestimmen. Wir setzen also

$$(1) \quad \xi_1' = a \xi_1 + b \xi_2 + c \xi_3$$

Es ist nun

$$(2) \quad \xi_1^2 = 1$$

Durch Differentiation ergibt sich

$$(3) \quad \xi_1 \xi_1' = 0$$

Multiplizieren wir (1) mit  $\xi_1$ , so ergibt sich

Wir haben nun gesehen, dass die Schmiegebene der Raumkurve von den Vektoren  $\mathcal{C}'$  und  $\mathcal{C}''$  aufgespannt wird. Also fällt wegen

$$\xi_1 = \mathcal{C}'$$

oder

$$(6) \quad \xi_1' = \mathcal{C}''$$

$\xi_1'$  in die Schmiegebene. Die Schmiegebene wird andererseits aber auch von den Vektoren  $\xi_1$  und  $\xi_2$  aufgespannt. Also ist

$$(7) \quad c = 0$$

Wir erhalten also

$$(8) \quad \xi_1' = b \xi_2$$

Um  $b$  zu bestimmen, quadrieren wir (8) und erhalten

$$(9) \quad \xi_1'^2 = b^2 \xi_2^2 = b^2$$

Nun war

$$(10) \quad \xi_1'^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

also wird  $b = \frac{1}{\rho}$  und demnach

$$(11) \quad \xi_1' = \frac{\xi_2}{\rho}$$

Betrachten wir nun  $\xi_3'$ . Wir setzen

$$(12) \quad \xi_3' = A \xi_1 + B \xi_2 + C \xi_3$$

Multiplizieren wir mit  $\xi_3$ , so folgt

$$\xi_3 \xi_3' = C$$

also

$$(13) \quad C = 0$$

Ferner ist, da  $\xi_1$  und  $\xi_3$  orthogonal sind,

$$\xi_1 \xi_3 = 0$$

Also ist

$$(14) \quad \xi_1 \xi_3' + \xi_1' \xi_3 = 0$$

Da nun auch  $\xi_1' \xi_3$  verschwindet, muss auch sein

$$(15) \quad \xi_1 \xi_3' = 0$$

und wir erhalten, wenn wir

$$\xi_3' = A \xi_1 + B \xi_2$$

mit  $\xi_1$  multiplizieren:

$$(16) \quad A = 0$$

folglich wird aus (12)

$$(17) \quad \xi_3' = B \xi_2$$

Um B zu ermitteln, quadrieren wir (17) und erhalten

$$\xi_3'^2 = B^2$$

Nun ist

$$|\xi_3'| = \frac{1}{r}$$

also

$$\xi_3'^2 = \frac{1}{r^2}$$

Es ist also

$$(18) \quad B^2 = \frac{1}{r^2}$$

also, wenn wir uns das Vorzeichen der Wurzel entsprechend wählen

$$B = -\frac{1}{r}$$

mithin

$$(19) \quad \xi_3' = -\frac{\xi_2}{r}$$


---

Endlich setzen wir

$$(20) \quad \xi_2' = \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 + \gamma \xi_3$$

Wir multiplizieren mit  $\xi_2$  und finden, da

$$\xi_2 \xi_2' = 0$$

$$(21) \quad \beta = 0$$

Um  $\alpha$  zu erhalten, multiplizieren wir

$$\xi_2' = \alpha \xi_1 + \gamma \xi_3$$

mit  $\xi_1$ . Dann wird

$$\xi_1 \xi_2' = \alpha = -\xi_2 \xi_1'$$

also

$$(22) \quad \alpha = -\frac{1}{r}$$

$$(23) \quad \gamma = + \frac{1}{\tau}$$

Setzen wir (21), (22), (23) in (20) ein, so folgt

$$(24) \quad \xi_2^1 = - \frac{\xi_1}{\rho} + \frac{\xi_3}{\tau}$$

-----

Wir erhalten somit die Gleichungen von F r e n e t :

$$(25) \quad \begin{aligned} \xi_1^1 &= \frac{\xi_2}{\rho} \\ \xi_2^1 &= - \frac{\xi_1}{\rho} + \frac{\xi_3}{\tau} \\ \xi_3^1 &= - \frac{\xi_2}{\tau} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen besitzen das symmetrische Koeffizientenschema

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist also schiefsymmetrisch, denn die Koeffizienten ändern das Vorzeichen, wenn man die Matrix an der Hauptdiagonale spiegelt.

An den Frenetschen Gleichungen hängt die ganze Kurventheorie. Wir wollen uns überlegen, was diese Gleichungen anschaulich besagen.

Die erste Gleichung enthält eine Aussage über das Tangentenbild, die dritte eine solche über das Binormalenbild der Raumkurve. Wenn wir die drei Bilder auf der Kugel eintragen, so sind für jeden Punkt der Raumkurve die Durchstosspunkte der drei Vektoren bestimmt durch ein Octantendreieck. Beim Durchlaufen der Kurve bewegen sich die drei Punkte. Und zwar bewegt sich das Tangentenbild parallel zu  $\xi_2$ , ebenso das Binormalenbild.  $\xi_2^1$  läuft in irgendeinem spitzen Winkel zwischen ihnen hindurch.

Nennen wir die Bogenlängen der Bilder  $s_1, s_2$  und  $s_3$ , so ergibt sich aus den Frenetschen Gleichungen unmittelbar

$$ds_2^2 = ds_1^2 + ds_3^2$$

§7:Krümmung und Windung als Funktion der Bogenlänge.

Wie können wir nun, wenn eine Raumkurve  $\gamma(t)$  gegeben ist, die Größen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \rho$  und  $\frac{1}{\tau}$  wirklich bestimmen. Wir haben noch kein Verfahren angegeben, diese fünf Größen zu ermitteln.

Wir suchen zunächst die Vektoren  $\xi$  zu bestimmen. Bei  $\xi_1$  ist das sehr leicht. Es ist

$$(1) \quad \xi_1 = \gamma'$$

Zur Bestimmung von  $\xi_2$  benutzen wir die Formeln von Frenet. Danach wird

$$(2) \quad \xi_2 = \rho \xi_1'$$

Quadrieren wir (2), so erhalten wir

$$1 = \rho^2 \xi_1'^2$$

oder

$$(3) \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{\xi_1'^2}}$$

Setzen wir in (2) ein, so wird

$$(4) \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{\xi_1'^2}} \xi_1'$$

oder

$$(5) \quad \xi_2 = \frac{\gamma''}{\sqrt{\gamma''^2}}$$

$\xi_3$  können wir erhalten unter Benutzung der Tatsache, dass  $\xi_3$  auf  $\xi_1$  und  $\xi_2$  senkrecht steht. Wir setzen also

$$(6) \quad \xi_3 = \xi_1 \times \xi_2$$

Damit haben wir jedenfalls die Richtung von  $\xi_3$  schon richtig erhalten. Der Betrag stimmt aber auch, weil die beiden Vektoren  $\xi_1$  und  $\xi_2$  ein Quadrat des Inhalts 1 aufspannen. Setzen wir (1) und (5) in (6) ein, so ergibt sich

$$(7) \quad \xi_3 = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\sqrt{\gamma''^2}}$$



Daraus ergibt sich

$$(9) \quad \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{y''^2}{b}}$$

Und um endlich die Torsion zu bestimmen, gehen wir von der dritten Frenetschen Gleichung aus. Danach ist

$$(10) \quad \frac{1}{\tau} = |\xi'_3|$$

Nun ist nach (7)

$$(11) \quad \xi_3 = \frac{y' \times y''}{\sqrt{y''^2}}$$

Diese Gleichung müssen wir also differenzieren. Das ergibt einen langen Ausdruck, den wir dann noch ~~maximal~~ ins Quadrat erheben müssen. Das gibt einen unübersichtlichen Ausdruck. Wir wollen es daher anders machen. Wir betrachten die zweite Frenetsche Formel

$$\xi'_2 = -\frac{\xi_1}{\rho} + \frac{\xi_3}{\tau}$$

und multiplizieren sie mit  $\xi_3$ :

$$(12) \quad \xi_3 \xi'_2 = -\frac{\xi_3 \xi_1}{\rho} + \frac{\xi_3^2}{\tau} = \frac{1}{\tau}$$

$\xi'_2$  ist nach der Kettenregel aus zwei Ausdrücken aufgebaut. Ich behaupte, dass eines von ihnen fortfällt. Es tritt der Term

$$(13) \quad y'' \cdot y' \times y'' = 0$$

auf. Ich kann mir also die Differentiation ersparen und erhalte

$$(14) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(y' y'' y''')}{y''^2}$$

Wir sehen also, dass die Krümmung sich durch eine Wurzel, also irrational ausdrückt, während die Windung sich rational ausdrückt. Bei der Wurzel ist das Vorzeichen zweideutig. Es kann also die Krümmung positives oder negatives Vorzeichen haben. Das ist uns ja auch aus der

Ferner sehen wir, dass bei der Krümmung nur die zweite Ableitung, bei der Torsion dagegen auch die dritte Ableitung der Kurve auftritt. Wenn also zwei Kurven in einem Punkte bis zu der zweiten Ableitung übereinstimmen, so haben sie dort gleiche Krümmung, dagegen kann die Schraubung noch ganz verschieden sein. Erst wenn auch die dritten Ableitungen übereinstimmen, ist auch die Schraubung gleich.

Diese letzte Tatsache kann man auch so ausdrücken, dass man vier benachbarte Kurvenpunkte zusammenrücken lassen muss, um die Torsion zu erhalten, dass zur Bestimmung der Krümmung drei Punkte genügen.

Wir schliessen hier noch eine heuristische Bemerkung an. Wir sagten schon, dass die Frenetschen Formeln die Raumkurve bestimmen. Das ergibt sich folgender Satz:

Wenn ich zwei Funktionen

$$(15) \quad \frac{1}{\rho} = f(s)$$

$$(16) \quad \frac{1}{\tau} = g(s)$$

willkürlich vorschreibe, dann ist es immer möglich, eine Raumkurve zu finden, bei der  $s$  die Bogenlänge,  $\frac{1}{\rho}$  die Krümmung und  $\frac{1}{\tau}$  die Windung ist, und es gibt, abgesehen von Bewegungen und bis auf eine Spiegelung nur eine einzige solche Raumkurve.

Dieser Satz wird plausibel durch folgende Grenz- betrachtung: Krümmung und Windung erhalten wir durch Grenzübergang von einem Polygonenzug, der vier nahe- gelegene Kurvenpunkte verbindet. Es seien nun vier derart aufeinanderfolgende Punkte gegeben und der durch sie hindurchgehende Polygonenzug. Dann ist die Krümmung und Torsion in dem letzten der vier Punkte gegeben und dadurch die Möglichkeit, den Polygonenzug fortzusetzen, auf eine einzige beschränkt. Die einzelnen Polygonenzüge aus vier Strecken fügen sich auf nur eine einzige Weise aneinander. Es ist also die Kurve durch den Polygonenzug im Limes bestimmt. Ein solches System von Gleichungen wie (15) und (16), das also eine Raumkurve bis auf eine Spiegelung und Bewegungen festlegt, nennt man das System der natürlichen Gleichungen. Man nennt diese Gleichungen natürlich, weil nur Grössen in ihnen auftreten, die mit der Kurve an und für sich etwas zu tun haben, nicht noch etwa Grössen, die von der speziellen Wahl des Koordinatensystems abhängen.

## §8:

Krümmung und Windung als Funktionen eines beliebigen Parameters.

Wir wollen nun versuchen, Krümmung und Windung auf einen beliebigen Parameter zu beziehen. Zu dem Zwecke müssen wir die Ableitungen nach der Bogenlänge in die nach einem beliebigen Parameter  $t$  umrechnen. Es wird

$$(1) \quad \dot{\gamma}' = \dot{\gamma} \frac{dt}{ds}$$

$$(2) \quad \dot{\gamma}'' = \dot{\gamma} \frac{d^2 t}{ds^2} + \ddot{\gamma} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2$$

Dann wird

$$(3) \quad (\dot{\gamma}''')^2 = \dot{\gamma}^2 \left( \frac{d^2 t}{ds^2} \right)^2 + 2 \dot{\gamma} \ddot{\gamma} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \ddot{\gamma}^2 \left( \frac{dt}{ds} \right)^4$$

Nun ist nach (4; 13)

$$(4; 13) \quad \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \dot{\gamma}^2$$

also

$$(4) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}}$$

Dann wird

$$(5) \quad \frac{d^2 t}{ds^2} = - \frac{\dot{\gamma} \ddot{\gamma} \frac{dt}{ds}}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}^3} = - \frac{\dot{\gamma} \ddot{\gamma}}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}^3 \sqrt{\dot{\gamma}^2}} = - \frac{\dot{\gamma} \ddot{\gamma}}{(\dot{\gamma}^2)^2}$$

Setzen wir (4), (5) in (3) ein, so ergibt sich

$$(6) \quad \begin{aligned} (\dot{\gamma}''')^2 &= \dot{\gamma}^2 \frac{(\dot{\gamma} \ddot{\gamma})^2}{\dot{\gamma}^2 (\dot{\gamma}^2)^3} - \frac{2(\dot{\gamma} \ddot{\gamma})^2}{(\dot{\gamma}^2)^3} + \frac{\ddot{\gamma}^2}{(\dot{\gamma}^2)^2} \\ &= \frac{(\dot{\gamma} \ddot{\gamma})^2}{(\dot{\gamma}^2)^3} - 2 \frac{(\dot{\gamma} \ddot{\gamma})^2}{(\dot{\gamma}^2)^3} + \frac{\dot{\gamma}^2 \ddot{\gamma}^2}{(\dot{\gamma}^2)^3} = \frac{\dot{\gamma}^2 \ddot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} \ddot{\gamma})^2}{(\dot{\gamma}^2)^3} \end{aligned}$$

und daraus erhalten wir nach (7; 9)

$$(7) \quad \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{\dot{\gamma}^2 \ddot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} \ddot{\gamma})^2}{(\dot{\gamma}^2)^3}}$$

In entsprechender Weise leiten wir eine Formel für die Windung ab. Da stoßen wir aber auf gewisse Schwierigkeiten, beim Umrechnen der Determinante. Um die Rechnung zu vereinfachen, stellen wir folgende Ueberlegung an: Es setzt sich  $\dot{\gamma}''$  aus  $\dot{\gamma}$  und  $\ddot{\gamma}$  zusammen, ferner setzt sich  $\dot{\gamma}'''$  aus  $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$  und  $\ddot{\gamma}'$  zusammen. Es gilt nun nach den Sätzen der Determinantenrechnung die Formel

$$(8) \quad \begin{aligned} (\dot{\gamma}', \dot{\gamma}'', \dot{\gamma}''') &= \left( \dot{\gamma} \frac{dt}{ds}, h(\dot{\gamma}) + \ddot{\gamma} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2, j(\dot{\gamma}) + h(\ddot{\gamma}) \right) \\ &= \left( \frac{dt}{ds} \right)^3 (\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}') = \frac{1}{(\dot{\gamma}^2)^3} (\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}') \end{aligned}$$

so dass vermöge (6) und (8) die Gleichung (7;14) übergeht in

$$(9) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \ddot{\beta}''')(\beta'')^3}{(\beta'')^3(\dot{\beta}''\ddot{\beta}'' - (\dot{\beta}\ddot{\beta}')^2)} = \frac{(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \ddot{\beta}''')}{(\dot{\beta}''\ddot{\beta}'' - (\dot{\beta}\ddot{\beta}')^2)}$$

Damit haben wir in der Tat Krümmung und Windung als Funktionen eines beliebigen Parameters ausgerechnet.

### §9:

#### Anwendung auf die kubische Raumkurve.

Wir wollen die gewonnenen Gleichungen auf die kubische Raumkurve

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= t^2 \\ x_3 &= t^3 \end{aligned}$$

anwenden. Nun ist aber die Theorie der kubischen Raumkurve affin. Ich kann also (1) auch in der Gestalt schreiben:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= \frac{1}{2} t^2 \\ x_3 &= \frac{1}{3} t^3 \end{aligned}$$

Dann wird

$$(3) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \dot{\beta}^2 = 1 + t^2 + t^4$$

und die Bogenlänge wird

$$(4) \quad s = \int \sqrt{1 + t^2 + t^4} dt$$

Es hat nun  $\dot{\beta}$  die Komponenten

$$(5) \quad \dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = t, \quad \dot{x}_3 = t^2$$

und  $\ddot{\beta}$  hat die Komponenten

$$(6) \quad \ddot{x}_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 = 1, \quad \ddot{x}_3 = 2t$$

Dann wird

$$(7) \quad \ddot{\beta}^2 = 1 + 4t^2$$

und

$$(8) \quad \dot{\beta}\ddot{\beta} = t + 2t^3$$

und es wird nach (8;7)

$$(9) \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{(1+t^2+t^4)(1+4t^2) - (t+2t^3)^2}{(1+t^2+t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1 + 4t^2 + t^4}{(1 + t^2 + t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

$\vec{f}''$  hat die Komponenten

$$(10) \quad \ddot{x}_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 = 0, \quad \ddot{x}_3 = 2$$

also wird

$$(11) \quad (\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & 2t & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Es wird also die Windung der kubischen Raumkurve

$$(12) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2}{1 + 4t^2 + t^4}$$

Wir sehen also, dass Krümmung und Windung der kubischen Raumkurve niemals verschwinden können.

### §10:

#### Die Schraubenlinie.

Unter Schraubenlinien verstehen wir solche Raumkurven, die sich in der Form darstellen lassen

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= \cos t \\ x_2 &= \sin t \\ x_3 &= h t \end{aligned}$$

Dabei ist  $h$  die Höhe der Schraube.

Ist  $h > 0$ , so haben wir es mit einer Rechtsschraube, ist  $h < 0$ , mit einer Linksschraube zu tun.

Es werden nun die Komponenten der charakteristischen Ausdrücke  $\vec{f}'$ ,  $\vec{f}''$  und  $\vec{f}'''$ :

$$(2) \quad \dot{x}_1 = -\sin t, \quad \dot{x}_2 = \cos t, \quad \dot{x}_3 = h$$

$$(3) \quad \ddot{x}_1 = -\cos t, \quad \ddot{x}_2 = -\sin t, \quad \ddot{x}_3 = 0$$

$$(4) \quad \dddot{x}_1 = \sin t, \quad \dddot{x}_2 = -\cos t, \quad \dddot{x}_3 = 0$$

Dann wird

$$(5) \quad \vec{f}'^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + h^2 = 1 + h^2$$

$$(6) \quad \vec{f}' \vec{f}'' = \sin t \cos t - \sin t \cos t = 0$$

$$(7) \quad \vec{f}''^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

und die Determinante wird

$$(8) \quad (\xi, \xi', \xi'') = \begin{vmatrix} -\sin t & -\cos t & \sin t \\ \cos t & -\sin t & -\cos t \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} = -h$$

Dann wird nach (8;6)

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(1+h^2)}{(1+h^2)^3} = \frac{1}{(1+h^2)^2}$$

und also die Krümmung

$$(9) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1+h^2}$$

Ferner wird nach (8;9) die Torsion

$$(10) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(\xi, \xi', \xi'')}{(\xi' \cdot \xi'' - (\xi \cdot \xi')^2)} = \frac{-h}{1+h^2}$$

Wir sehen also, dass Krümmung und Windung nur von der Höhe der Schraube abhängen, bei gegebener Höhe also konstant sind:

Die Schraubenlinien sind dadurch charakterisiert, dass bei gegebener Höhe Krümmung und Windung konstant sind.

Die Schraubenlinien sind also gegenüber einer Parametertransformation invariant.

Für  $h = 0$  geht die Schraubenlinie in einen Kreis über, und beim Kreis ist uns ja geläufig, dass Krümmung und Torsion konstant sind, nämlich Krümmung gleich 1 und Torsion gleich Null.

### §11:

#### Die Näherungsprojektionen der Raumkurve auf die Ebenen des Frenetschen Dreikants.

Wir haben schon in §7 angedeutet, dass es immer möglich ist, bei einem vorgegebenen Parameter  $s$  und zwei willkürlichen Funktionen  $f(s)$  und  $g(s)$  eine Kurve zu finden, für die  $s$  die Bogenlänge,  $f(s)$  die Krümmung und  $g(s)$  die Windung wird. Wir haben auch schon durch eine heuristische Betrachtung den Beweis zu erbringen versucht. Jetzt wollen wir den Satz streng beweisen. Da gehen wir aus von den Frenetschen Formeln. Wir betrachten den Ortsvektor der gesuchten Kurve,  $\xi(s)$ . Dann ist

$$(1) \quad \mathcal{C}'(s) = \xi_1$$

$$(2) \quad \mathcal{C}'' = \xi_1' = \frac{\xi_2}{\rho}$$

$$(3) \quad \mathcal{C}''' = \left(\frac{1}{\rho}\right)' \xi_2 + \frac{1}{\rho} \xi_2' = \left(\frac{1}{\rho}\right)' \xi_2 - \frac{1}{\rho^2} \xi_1 + \frac{1}{\rho^2} \xi_3$$

Dieses Verfahren, die Ableitungen des Ortsvektors durch die drei Vektoren  $\xi_1, \xi_2$  und  $\xi_3$  auszudrücken, kann niemals abbrechen, denn immer wieder kann man die Frenetschen Formeln anwenden. Es wird sich also die  $n$ -te Ableitung des Ortsvektors ausdrücken als lineare Funktion der drei Vektoren  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ :

$$(4) \quad \mathcal{C}^{(n)} = a_1^{(n)} \xi_1 + a_2^{(n)} \xi_2 + a_3^{(n)} \xi_3$$

wobei die Koeffizienten  $a_i^{(n)}$  eindeutig von der Krümmung, der Torsion und ihren Ableitungen abhängen.:

$$(5) \quad a_i^{(n)} = a_i^{(n)}(\rho, \tau, \rho', \tau', \dots)$$

Dieser Satz lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Er gilt für  $n=3$ . Angenommen, er gilt für  $n$ , so ist er für  $(n+1)$  zu beweisen. Zu dem Zwecke differenzieren wir (4) nach der Bogenlänge, fassen entsprechend zusammen unter Berücksichtigung der Frenetschen Formeln und sind fertig.

Nun setzen wir für  $\mathcal{C}(s)$  die Taylorentwicklung an. Es wird

$$(6) \quad \mathcal{C}(s) = \mathcal{C}(0) + s \mathcal{C}'(0) + \frac{s^2}{2!} \mathcal{C}''(0) + \frac{s^3}{3!} \mathcal{C}'''(0) + \dots$$

Nun denken wir in diese Gleichung die Frenetschen Formeln eingesetzt. Dabei denken wir das Koordinatensystem so gewählt, dass an der Stelle  $s=0$  das Frenetsche Dreikant mit ihm zusammenfällt. Dann erhalten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  in diesem System die Komponenten

$$(7) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= (1, 0, 0) \\ \xi_2 &= (0, 1, 0) \\ \xi_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Den Eindeutigkeits- und Konvergenzbeweis der Taylorentwicklung unterdrücken wir an dieser Stelle.

Wir denken uns nun nicht die unendliche Taylorreihe angesetzt, sondern nach der Taylorformel

$$(8) \quad \mathcal{C}(s) = \mathcal{C}(0) + s \mathcal{C}'(0) + \frac{s^2}{2!} \mathcal{C}''(0) + \frac{s^3}{3!} \mathcal{C}'''(0) + \frac{s^4}{4!} \mathcal{C}^{(4)}(0) + \dots$$

Dieser Ansatz ist erlaubt, wenn der Vektor  $\xi(s)$  viermal differenzierbar ist. Das wollen wir aber voraussetzen. Nun fassen wir die Anfangsglieder für ein spezielles Koordinatensystem ins Auge, dessen Ursprung im Punkte  $s$  liegt. Dann wird

$$(9) \quad \xi(s) = 0$$

Und unter Berücksichtigung von (1), (2) und (3) erhalten wir

$$(10) \quad x_1 = s - \frac{1}{\rho^2} \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} y_1(s)$$

$$(11) \quad x_2 = \frac{1}{\rho} \frac{s^2}{2!} + \left(\frac{1}{\rho}\right)' \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} y_2(s)$$

$$(12) \quad x_3 = \frac{1}{\rho^2} \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} y_3(s)$$

Diese Gleichungen haben wir zu deuten. Zu dem Zwecke denken wir uns die Raumkurve auf die Ebenen des Frenetschen Dreikantes  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  projiziert. Und da sehen wir, dass in der  $\xi_1 \xi_2$ -Ebene die Projektion sich auffassen lässt als

$$(13) \quad x_1 = s$$

$$(14) \quad x_2 = \text{const } s^2$$

oder

$$(15) \quad x_2 = \text{const } x_1^2,$$

dass also die Projektion auf die  $\xi_1 \xi_2$ -Ebene eine quadratische Parabel ist. (Fig. 1).

Projizieren wir auf die  $\xi_1 \xi_3$ -Ebene, so wird

$$(16) \quad x_1 = s$$

$$x_3 = \text{const } s^3$$

oder

$$(17) \quad x_3 = \text{const } x_1^3$$

Da erhalten wir also eine kubische Parabel (Fig. 2).

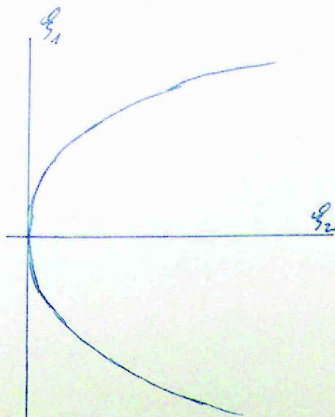


Fig. 1

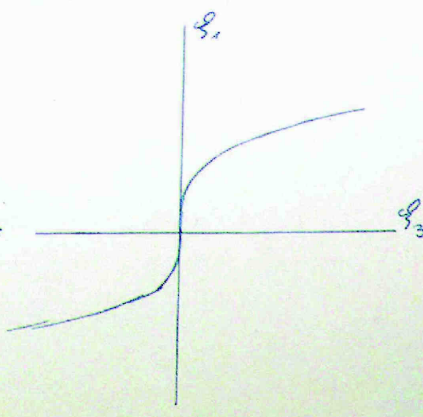


Fig. 2

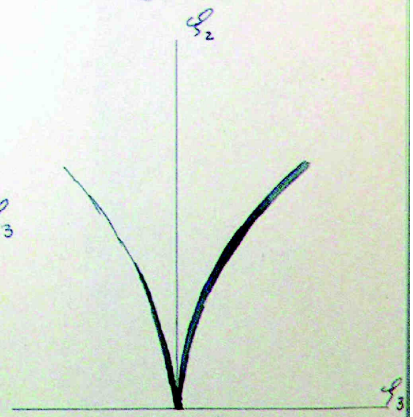


Fig. 3



Und projizieren wir endlich auf die  $\xi_2\xi_3$ -Ebene, so wird

$$(18) \quad \begin{aligned} x_2 &= c_1 s^2 \\ x_3 &= c_2 s^3 \end{aligned}$$

oder

$$(19) \quad x_3^2 = c_3 x_2^3$$

Und das ergibt den Fall von Figur 3. Es muss im Nullpunkte eine Spitze geben, denn wenn  $x_3$  sein Vorzeichen ändert, so ändert sich an dem Funktionswerte gar nichts, andererseits ist aber für  $x_3=0$  auch  $x_2=0$ .

Aus diesen Überlegungen erkennen wir, dass die Schmiegeebene in jedem Punkte von der Raumkurve durchsetzt wird.

## 2. Kapitel:

### Die Gestaltlehre der Regelflächen.

#### § 12:

##### Definition der Regelfläche.

Wir haben schon im vorigen Kapitel an eine Raumkurve ein Dreikant angeschlossen, haben also die Kurve mit einem System von Geraden verknüpft, und haben auch schon ein System von Ebenen, die Schmiegeebenen, mit dem Kurvenpunkte wandern lassen. Jetzt betrachten wir solche Geraden- und Ebenenscharen. Wir denken uns einen laufenden Punkt auf einer laufenden Geraden. Der Ortsvektor dieses Punktes sei  $\eta$ . Dann wird die entstehende Geradenschar durch die Gleichung

$$(1) \quad \eta = \zeta(t) + l \xi(t)$$

charakterisiert. Dabei wählen wir den Richtungsvektor  $\xi$  von der Länge 1:

$$(2) \quad \xi^2 = 1$$

Es hängt also die Gesamtheit der betrachteten Punkte von zwei Parametern,  $t$  und  $l$ , ab. Die Fläche, die von dieser Geradenschar überstrichen wird, nennt man eine **R e g e l f l ä c h e**.

Es muss also durch jeden Punkt der Regelfläche eine und nur eine Gerade (im allgemeinen) hindurchgehen.

## §13:

Geometrische Begriffe.

Für diese Regelflächen wollen wir die charakteristischen Grössen untersuchen. Um das zu können, denken wir uns eine Geradeder Regelfläche und ihre Nachbargerade herausgegriffen. Diese beiden Geraden werden im allgemeinen windschief sein. Wir haben also zu untersuchen, welche geometrischen Invarianten zwei windschiefe Gerade besitzen. Da ist einmal der Winkel zwischen benachbarten Geraden eine geometrische Grösse, ferner die Entfernung der beiden Nachbargeraden, die, da sie im allgemeinen windschief sind, von Null verschieden sein wird. Wir bilden nun den Quotienten aus dem Winkel der beiden Geraden und ihrem Abstände. Dieser Quotient wird im allgemeinen gegen einen gewissen Grenzwert gehen, wenn wir die beiden Geraden zusammenrücken lassen. Den Grenzwert nennen wir den Drall.

Ein weiterer, sehr wesentlicher Begriff für die benachbarten Geraden ist der des gemeinsamen Lotes. Zwei windschiefe Gerade besitzen immer ein gemeinsames Lot. Halten wir nun die eine Gerade fest und lassen die andere gegen sie anrücken, dann wird sich der Fusspunkt des gemeinsamen Lotes auf der festen Geraden einer gewissen Grenzlage nähern. Diesen Grenzpunkt nennt man den Kehlpunkt. So gibt es also eindeutig auf jeder Geraden der Regelfläche einen Kehlpunkt. Verbinden wir die Kehlpunkte der verschiedenen Geraden, so erhalten wir eine Kurve auf der Regelfläche, die Struktionslinie.

Es erhebt sich nun das Problem, wie wir eine Regelfläche invariant charakterisieren können. Bei einer Raumkurve hatten wir da einen Polygonenzug zur Verfügung, der in der Grenze gegen die Kurve selbst ging. Entsprechend ersetzen wir jetzt die Regelfläche durch ein System von benachbarten Geraden. Wir wollen o.B.d.A. annehmen, dass die verschiedenen Geraden voneinander die Abstände 1 haben. Wie kann man dann die zweite Gerade durch die erste festlegen? Offenbar durch den Drall. Auch von der zweiten zur dritten Geraden kann ich durch den Drall kommen, aber nicht mehr eindeutig. Man kann einmal die dritte Gerade um die zweite Gerade rotieren lassen und ausserdem den Kehlpunkt auf der zweiten Geraden beliebig verschieben, und immer wird der Drall der dritten Geraden gegen die zweite derselbe sein. Wir wollen aber doch

verlangen, dass die dritte Gerade an die ersten beiden stark gekoppelt sein soll.

Die Drehung schalten wir durch folgende Überlegung aus: Wir denken uns die sphärischen Bilder der Geraden. Sind die gegeben, so ist eine Rotation der dritten Geraden um die zweite nicht mehr möglich außer in dem trivialen Falle paralleler Geraden.

Die Parallelverschiebung der dritten Geraden schalten wir so aus: Nachdem wir die beiden Geraden 1 und 2 festgelegt haben, ist auch der Kehlpunkt auf 1 fest. Um nun die Gerade 3 festzulegen, genügt es offenbar, den Kehlpunkt auf der Geraden 2 zu geben. Dieser Kehlpunkt wird offenbar bestimmt, wenn man den Winkel angibt, den die Verbindungslinie der Kehlpunkte der Geraden 1 und 2 mit der Geraden 1 bildet. Diesen Winkel nennt man die Schrotung.

Durch diese drei Größen: Drall, Richtungskrümmung des sphärischen Bildes und Schrotung wird die Regelfläche festgelegt.

Wir sehen also, dass, während bei einer Raumkurve zwei Größen, Krümmung und Windung, zur Charakterisierung ausreichen, wir jetzt bei einer Regelfläche drei Bestimmungsgrößen brauchen. Und das ist auch ganz plausibel.

#### §14:

##### Die Gleichung des Kehlpunktes und der Kehllinie.

Es sei uns eine Regelfläche gegeben

$$(1) \quad \eta = \zeta(t) + \lambda \xi(t)$$

mit

$$(2) \quad \xi^2(t) = 1$$

Dann läuft die Bestimmung ~~darauf hinaus~~ des Kehlpunktes darauf hinaus, für festes  $t$  einen bestimmten Wert von  $\lambda$  ausfindig zu machen. Wenn  $t$  fest ist, durchläuft  $\eta$  eine Gerade der Schar als Funktion des Parameters  $\lambda$ . Und wir haben  $\lambda$  so zu bestimmen, dass gerade  $e$  der Kehlpunkt sich ergibt. Er war definiert als die Grenzlage des Fusspunktes des gemeinsamen Lotes zweier benachbarter Geraden. Wir können nun das gemeinsame Lot auch definieren als die kürzeste Entfernung der beiden Geraden. Zu dem Zwecke betrachten wir irgendeine Kurve, die irgend zwei Punkte der beiden Geraden verbindet. Die Parameterwerte der beiden Geraden seien  $t_1$  und  $t_2$ .  $\eta_1$  sei der Ortsvektor des Punktes auf der Geraden  $t_1$ ,  $\eta_2$  der

des Punktes auf der Geraden  $t_2$ . Dann haben wir also die Entfernung der beiden Punkte,  $\eta_1 - \eta_2$ , zum Minimum zu machen. Damit wir den Grenzübergang vornehmen können, setzen wir

$$(3) \quad t_1 - t_2 = h$$

und suchen den Grenzwert des Ausdruckes

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{h}$$

Setzen wir nun in diesem Ausdruck die Gleichung der Begelfläche (1) ein, so erhalten wir

$$(4) \quad \frac{\eta_1 - \eta_2}{h} = \frac{\xi_1 - \xi_2}{h} + \frac{l_1 \xi_1 - l_2 \xi_2}{h} \\ = \frac{\xi_1 - \xi_2}{h} + \frac{(l_1 - l_2)}{h} \xi + l_2 \frac{\xi_1 - \xi_2}{h}$$

Gehen wir zur Grenze  $h=0$  über, so erhalten wir

$$(5) \quad \eta' = \xi' + l' \xi + l \xi'$$

Diesen Ausdruck haben wir zum Minimum zu machen, oder auch das Quadrat:

$$(6) \quad \eta'^2 = (\xi' + l' \xi + l \xi')^2 = \text{Min}$$

Wir haben also die Ableitung dieses Ausdruckes nach  $l$  gleich Null zu setzen. Das ergibt die Bedingungsgleichung

$$(7) \quad 2(\xi' + l' \xi + l \xi') l' = 0$$

und hier nach (2)

$$(8) \quad \xi^2 = 1$$

d. h.

$$(9) \quad \xi \xi' = 0$$

Multiplizieren wir (7) aus, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (3) die Gleichung für den Kehlpunkt

$$(10) \quad \xi' \xi' + l \xi'^2 = 0$$

Das ist eine Bestimmungsgleichung für  $l$ . Die Auflösung dieser Gleichung wird sinnlos, wenn  $\xi'^2$  verschwindet. Das bedeutet aber, dass  $\xi$  die Richtung der Geraden ist, dass benachbarte Geraden parallel sind, und dann wird in der Tat der Kehlpunkt unbestimmt. Wenn also dieser Ausnahmefall nicht eintritt, dann heisst die Gleichung für den Kehlpunktsabstand

$$(11) \quad l = -\frac{\xi \xi'}{\xi'^2}$$

Wir können also den Kehlpunkt durch diese Gleichung definieren.

Denken wir uns nun die Regelfläche auf die Kehllinie bezogen, so wird  $l=0$  und wir erhalten für die Kehllinie:

$$(11) \quad \frac{\gamma' \xi'}{\sqrt{\xi' \xi'}} = 0$$

§15:

Der Drall.

Wir gehen nun dazu über, den Drall der Regelfläche zu bestimmen. Da müssen wir einige einfache Formeln aus der analytischen Geometrie heranziehen: Gegeben seien zwei Geraden

$$(1) \quad \gamma_1 = \xi_1 + l \xi_1$$

$$(2) \quad \gamma_2 = \xi_2 + m \xi_2$$

Wir wollen den Abstand der beiden Geraden berechnen. Zu verschaffen wir uns zunächst die Richtung des gemeinsamen Lotes. Das ist ein bestimmter Vektor. Dann ist die Länge des gemeinsamen Lotes gleich der Projektion der Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte der beiden Geraden auf die Richtung des gemeinsamen Lotes. Die beiden Geraden haben die Richtung  $\xi_1$  und  $\xi_2$ . Dann ist das Kreuzprodukt  $\xi_1 \times \xi_2$  ein Vektor, der senkrecht auf beiden Geraden steht, der also die Richtung des gemeinsamen Lotes hat. Und die Orthogonalprojektion der Verbindungslinie  $\gamma_1 - \gamma_2$  der beiden beliebigen Punkte auf diese Richtung wird

$$(3) \quad \bar{a} = (\xi_1 \times \xi_2)(\gamma_1 - \gamma_2)$$

Bei müssen wir aber Sorge dafür tragen, dass der Vektor  $(\xi_1 \times \xi_2)$  die Länge 1 hat. Wir erhalten also für den Abstand der beiden Geraden

$$(4) \quad a = \frac{(\xi_1 \times \xi_2)(\gamma_1 - \gamma_2)}{|\xi_1 \times \xi_2|}$$

Es ist nun nach den Regeln der Vektorrechnung

$$(5) \quad \xi_1 \times \xi_2 = \xi_1 \times (\xi_2 - \xi_1)$$

so dass aus (4) folgt

$$(6) \quad a = \frac{\xi_1 \times (\xi_2 - \xi_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{|\xi_1 \times (\xi_2 - \xi_1)|} = \frac{((\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \xi_1, \xi_2 - \xi_1)}{|\xi_1 \times (\xi_2 - \xi_1)|}$$

$$= \frac{\left( \frac{\eta_1 - \eta_2}{h}, \xi_1, \frac{\xi_2 - \xi_1}{h} \right)}{\left| \xi_1 \times \frac{\xi_2 - \xi_1}{h} \right|} h$$

Damit haben wir den Abstand ausgerechnet. Nun berechnen wir ganz entsprechend den Winkel zwischen den beiden Geraden. Da es sich dabei um sehr kleine Winkel handelt, können wir anstelle des Winkels selbst auch den Sinus des Winkels betrachten. Es ist nun

$$(7) \quad |\xi_1 \times \xi_2| = |\xi_1| |\xi_2| \sin \alpha = \sin \alpha$$

wenn  $\alpha$  der Winkel zwischen den beiden Geraden ist.

Wir erhalten also endlich für den Drall

$$(8) \quad \delta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\xi_1 \times \xi_2| \left| \xi_1 \times \frac{\xi_2 - \xi_1}{h} \right|}{\left( \frac{\eta_1 - \eta_2}{h}, \xi_1, \frac{\xi_2 - \xi_1}{h} \right)} h$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| \xi_1 \times \frac{\xi_2 - \xi_1}{h} \right|^2 h}{\left( \frac{\eta_1 - \eta_2}{h}, \xi_1, \frac{\xi_2 - \xi_1}{h} \right)}$$

also

$$(9) \quad \delta = \frac{|\xi \times \xi'|^2}{(\eta', \xi, \xi')}$$

Es ist nun nach (1)

$$(1) \quad \eta' = \eta'' + 1'\eta' + 1\xi''$$

Wir können also in der Determinante  $\eta'$  durch  $\eta''$  ersetzen. Dann wird also

$$(10) \quad \delta = \frac{(\xi \times \xi')^2}{(\eta'', \xi, \xi')}$$

Es gilt nun allgemein folgende Formel

$$(11) \quad (a \times b)^2 = a^2 b^2 - (ab)^2$$

(Beweis: Wir schreiben die Gleichung aus und erhalten

$$\begin{aligned} |a|^2 |b|^2 \sin^2 \alpha &= |a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2 \alpha = |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= |a|^2 |b|^2 \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad )$$

Formen wir entsprechend (11) die Gleichung (10) um, so wird

$$\delta = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 - (\xi_1 \xi_2)^2}{(\eta'', \xi, \xi')} = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2 - (\xi_1 \xi_2)^2}{(\eta'', \xi, \xi')}$$

Nun ist

$$(\xi \xi') = 0$$

also wird

$$(12) \quad \delta = \frac{\xi'^2}{(\xi', \xi, \xi')}$$

### §16:

#### Die Torse.

Von der im vorigen Paragraphen für den Drall abgeleiteten Formel machen wir eine Anwendung. Wir haben schon festgestellt, dass, wenn der Drall verschwindet, benachbarte Gerade parallel sind. Dann haben wir es also mit einem Zylinder zu tun. Jetzt wollen wir den Fall untersuchen, wenn

$$(1) \quad \frac{1}{\delta} = 0$$

ist. Nach (15;12) wird dann

$$(2) \quad (\xi', \xi, \xi') = 0$$

Dass diese Determinante verschwindet, bedeutet, dass die drei Vektoren  $\xi'$ ,  $\xi$  und  $\xi'$  linear abhängig sind. Wir setzen also an

$$(3) \quad a \xi' + b \xi + c \xi' = 0$$

für jede Führungskurve  $\xi$ . Setzen wir insbesondere als Führungskurve die Kehllinie an, so wird nach (13;11)

$$(4) \quad \xi \xi' = 0$$

Multiplizieren wir (3) mit  $\xi'$ , so wird wegen (4)

$$b \xi \xi' + c \xi'^2 = 0$$

oder wegen

$$\xi \xi' = 0$$

$$(5) \quad c = 0$$

wenn nur

$$\xi'^2 \neq 0$$

ist. Also wird aus (3)

$$(6) \quad a \xi' + b \xi = 0$$

$a$  und  $b$  können nicht beide gleichzeitig verschwinden. Wäre nun etwa  $a=0$ , so müsste wegen  $\xi' \neq 0$  auch  $b$  verschwinden. Wäre  $b=0$ , so würde folgen  $\xi' = 0$ . Und das bedeutete eine Singularität der Fläche. Im Allgemeinen ist also (6) nach

$\xi$  auflösbar:

$$(7) \quad \xi = -\frac{A}{B} \zeta'$$

Diese Gleichung bedeutet also: Die Fläche ist die Tangentialfläche einer Raumkurve, eine abwickelbare Fläche, eine T o r s e, und zwar ist sie die abwickelbare Tangentialfläche der Kehllinie.

Auch die Umkehrung dieser Tatsache lässt sich beweisen. Bilden wir für irgendeine Raumkurve die Tangentialfläche, so gilt für diese

$$(8) \quad \frac{1}{B} = 0$$

Die Gleichung der Tangentialfläche sei

$$(9) \quad \gamma = \zeta(t) + 1 \xi(t)$$

Setzen wir nun

$$t = s$$

so wird

$$(10) \quad \gamma = \zeta(s) + 1 \zeta'(s)$$

denn dann ist

$$\xi = \zeta'$$

(10) ist also die Gleichung der Regelfläche, wenn sie Tangentialfläche zu  $\zeta$  ist. Es ist nun

$$(11) \quad \xi' = \zeta''$$

Dann geht die Voraussetzung  $\xi'^2 \neq 0$  über in

$$(12) \quad \zeta'' \neq 0$$

Nun müssen wir die Determinante  $(\zeta', \xi, \xi')$  bilden. Die verschwindet aber, da zwei Spalten gleich sind. Also ist in der Tat

$$(3) \quad \frac{1}{B} = 0$$

Diese Tatsache kann man sich auch anschaulich plausibel machen. Wir haben nach der Regelfläche gefragt, für die der reziproke Drall verschwindet. Dann müssen sich offenbar benachbarte Gerade schneiden. Denken wir uns die Schnittpunkte der Geraden markiert. Verbinde ich diese Schnittpunkte untereinander, so erhalte ich in der Grenze die Kehllinie, denn die Schnittpunkte sind in der Grenze mit den Kehlpunkten identisch.



3. Kapitel:Einparametrische Scharen von Ebenen.§17:Definitionen.

Wir haben uns im ersten Kapitel mit Raumkurven, also einparametrischen  $\gamma$  und  $\gamma'$  tscharen und im zweiten Kapitel mit einparametrischen Geradenscharen beschäftigt. Jetzt gehen wir einen Schritt weiter und betrachten einparametrische Scharen von Ebenen. Da erhebt sich zunächst die Frage: Wie können wir eine einparametrische Schar von Ebenen am zweckmässigsten darstellen? Wir gehen da genau so vor wie bei den einparametrischen Scharen von Geraden. Da gaben wir uns eine Kurve und ordneten jedem Punkte der Kurve eine Gerade zu, Jetzt betrachten wir irgendeine Raumkurve, eine Führungslinie und ordnen jedem Punkte der Kurve eine beliebige Ebene zu. Dann wandert diese Ebene mit einem Parameter längs der Führungslinie entlang. Die Gleichung der Raumkurve sei

$$(1) \quad \gamma = \gamma(t)$$

Dann können wir nun die Ebene, die wir jedem Punkte der Raumkurve anheften, durch zwei Vektoren beschreiben, welche die Ebene aufspannen. Diese beiden Vektoren seien  $\eta(t)$  und  $\zeta(t)$ . Dann wird irgendein Punkt der wandernden Ebene dargestellt durch die ~~xxxx~~ Gleichung

$$(2) \quad \eta = \gamma(t) + u \eta(t) + v \zeta(t)$$

Dabei wird es natürlich zweckmässig sein, die beiden Vektoren  $\eta$  und  $\zeta$  nicht parallel zu wählen.

Diese Festlegung der Ebene ist aber nicht günstig für die weitere Betrachtung. Es wird sich als praktisch erweisen, die Ebene durch ihren Normalenvektor  $\xi(t)$  festzulegen. Da es uns dabei nur auf die Richtung dieses Vektors ankommt, setzen wir

$$(3) \quad \xi^2 = 1$$

Es ist nun  $\eta - \gamma$  ein Vektor in der Ebene. Er muss auf  $\xi$  senkrecht stehen. Es wird also die Gleichung der Ebene werden

$$(4) \quad (\eta(t) - \gamma(t)) \xi(t) = 0$$

Was für geometrische Folgerungen können wir nun aus dieser Einführung der Ebenenschar ziehen? Wir wissen, dass zwei Ebenen eine Schnittgerade haben. Halten wir eine Ebene der Schar fest und bringen sie mit einer benachbarten zum Schnitt, so ergibt sich von selbst das Problem, die Ebene  $e'$  gegen die Ebene  $e$  wandern zu lassen und zu untersuchen, was aus der Schnittgeraden wird. Sie wird gegen eine gewisse Grenzlage wandern. Diese Grenzlage nennen wir die *C h a r a k t e r i s t i k* der beweglichen Ebene  $e'$  in bezug auf die feste Ebene  $e$ . Da sehen wir also, dass der Ebenenschar in eindeutiger Weise eine Geradenschar, die Schar der Charakteristiken zugeordnet wird.

Wir wissen nun weiter, dass drei Ebenen einen Punkt bestimmen, halten wir also wieder eine Ebene der Schar fest und lassen zwei benachbarte gegen sie wandern, dann wird der Schnittpunkt der drei Ebenen gegen eine gewisse Grenzlage wandern. Es wird auf diese Weise der Ebenenschar also eine Punktmenge, eine Raumkurve zugeordnet. Diese Raumkurve nennen wir die *R ü c k k e h r k a n t e* der Ebenenschar.

Aus diesen Definitionen ergeben sich sofort interessante Tatsachen. Zunächst einmal sehen wir, dass die Rückkehrkante, die wir ja auch als die Gesamtheit derjenigen Punkte ansehen können, die durch den Schnitt zweier benachbarter Charakteristiken erzeugt werden, ganz in der von den Charakteristiken überstrichenen Regelfläche liegt. Ich behaupte nun sogar, dass diese Regelfläche abwickelbar ist, und ferner, dass sie aus den Tangenten der Rückkehrkante besteht. Es ist ja die Regelfläche eine solche, bei der sich die Erzeugenden schneiden. Und für eine solche Ebene haben wir in § 16 gesehen, dass sie eine Tangentialfläche, eine abwickelbare Fläche ist. Dass nun gerade die Rückkehrkante diejenige Raumkurve ist, deren Tangentenfläche die Regelfläche der Charakteristiken ist, erhellt aus der Tatsache, dass sich ja die Charakteristiken auf der Rückkehrkante schneiden. Es ist also die Rückkehrkante die Kehllinie der Charakteristikenfläche.

Noch eine weitere Tatsache springt sofort heraus. Betrachten wir drei sukzessive Ebenen  $e, e'$  und  $e''$ . Dann bestimmen diese drei Ebenen zwei Charakteristiken,  $e$  und  $e'$  etwa  $g$  und  $e'$  und  $e''$  etwa  $g'$ . Das heißt aber, dass beide Charakteristiken in der Ebene  $e'$  liegen. Es wird also allgemein eine Ebene der Schar von zwei konsekutiven Charakteristiken aufgespannt. Das heißt

aber: Jede Ebene der Schar ist Schmiegeebene der Rückkehrkante.

-----  
§18:

Die Charakteristik.

Wir wollen nun daran gehen, die Gleichung für die Charakteristik aufzustellen. Das ist formal ein Problem der Differentialrechnung, ein Enveloppenproblem. Wir suchen ja diejenigen Geraden, welche die Schnittgeraden von zwei benachbarten Ebenen sind. Die Gleichungen der beiden benachbarten Ebenen seien

$$(\gamma - \zeta(t_1)) \xi(t_1) = 0$$

$$(\gamma - \zeta(t_2)) \xi(t_2) = 0$$

oder, wenn wir allgemein setzen

$$\zeta(t_1) = \zeta_1$$

$$(1) \quad (\gamma - \zeta_1) \xi_1 = 0$$

$$(2) \quad (\gamma - \zeta_2) \xi_2 = 0$$

Setzen wir nun

$$(3) \quad t_1 - t_2 = h$$

so folgt durch Subtraktion der beiden Gleichungen (1) und (2) und durch Multiplikation mit  $1/h$

$$(4) \quad \frac{1}{h} (\gamma \xi_1 - \zeta_1 \xi_1 - \gamma \xi_2 + \zeta_2 \xi_2) = 0$$

Führen wir den Grenzübergang  $h=0$  durch, so wird aus (4)

$$(5) \quad \gamma \dot{\xi} - \zeta \dot{\xi} - \zeta' \xi = 0$$

oder

$$(6) \quad (\gamma - \zeta) \dot{\xi} - \zeta' \xi = 0$$

Wir erhalten also für die Punkte der Charakteristik die Gleichungen

$$(1) \quad (\gamma - \zeta) \xi = 0$$

$$(6) \quad (\gamma - \zeta) \dot{\xi} - \zeta' \xi = 0$$

oder, wenn wir die skalaren Produkte ausführen und berücksichtigen, dass für eine Charakteristik  $\zeta$  und  $\xi$  als konstante Vektoren angesehen werden müssen,

$$(7) \quad y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 = a$$

$$(8) \quad y_1 \xi'_1 + y_2 \xi'_2 + y_3 \xi'_3 = b$$

wobei  $\xi_i$  und  $\xi'_i$  die Komponenten der Vektoren  $\xi$  und  $\xi'$  sind.

Die Gleichungen (7) und (8) sind nun die Gleichungen zweier Ebenen, welche die Normalen mit den Richtungsvektoren  $\xi_i$  und  $\xi'_i$  haben. Es würde nun die Charakteristik unbestimmt werden, wenn die beiden Ebenen parallel wären. Das kann eintreten, wenn die beiden Vektoren  $\xi$  und  $\xi'$  parallel sind. Das kann nun aber nicht sein, da das skalare Produkt der beiden Vektoren, wie aus (17;3) hervorgeht, verschwinden muss. Es könnte aber auch dann die Charakteristik unbestimmt werden, wenn eine der beiden Gleichungen (7) oder (8) eine Trivialität darstellte, wenn also  $\xi'$  oder  $\xi$  identisch verschwindet. Das letztere kann nicht eintreten, da  $\xi$  Einheitsvektor ist.  $\xi'=0$  dagegen müssen wir ausschliessen, müssen also voraussetzen

$$(9) \quad \xi' \neq 0$$

Diese Ungleichung besagt, dass wir solche Führungskurven ausschliessen wollen, bei denen benachbarte Ebenen parallel sind. Das ist auch anschaulich ohne weiteres verständlich.

Es war nun bisher unsere Führungskurve  $\gamma$  ganz allgemein gewählt. Es liegt n. n. nahe, zu fragen: Welche Bedingung muss die Führungskurve erfüllen, damit sie alle Charakteristiken schneidet? Damit also  $\gamma$  auch als Führungslinie der von den Charakteristiken erzeugten Regelfläche aufgefasst werden kann. Die Antwort ist unmittelbar zu geben: Wenn  $\gamma$  auf den Charakteristiken liegen soll, dann muss  $\gamma$ , wenn es für  $\gamma$  in die Gleichungen (1) und (6) einsetzen, diese Gleichungen befriedigen. Die Gleichung (1) ist dann aber sofort erfüllt, weil dann der erste Faktor der linken Seite verschwindet. Die zweite Gleichung ist aber dann und nur dann erfüllt, wenn

$$(10) \quad \gamma' \cdot \xi = 0$$

ist. Wir sehen also, dass die Charakteristiken nur dann die Führungskurve schneiden, wenn (10) erfüllt ist. Diese Gleichung besagt nun aber, dass die Tangente der Führungskurve auf dem Normalenvektor der Ebenenschar senkrecht steht. Das heisst aber, dass die Tangente der Führungskurve in die variable Ebene hineinfällt, dass also die variable Ebene in jedem Punkte die Führungskurve tangiert.

§19:Die Rückkehrkante.

Wir wissen schon aus den Überlegungen in §17, dass je er Punkt der Rückkehrkante auf der Regalfläche der Charakteristiken liegen muss. Es muss also jeder Punkt der Rückkehrkante die beiden Gleichungen (18;1) und (18;6) erfüllen. Wir haben also nur noch eine dritte Gleichung zu suchen. Da könnte man auf die Idee kommen, etwa auch die zweite und dritte Ebene <sup>so</sup> zu behandeln, wie wir die erste und zweite Ebene im vorigen Paragraphen zur Gewinnung der Gleichung (18;6) benutzt haben. Da würde man aber nichts Neues gewinnen, sondern wieder auf die Gleichung (18;6) kommen. Um weiterzukommen, wollen wir uns allge ein das Problem erläutern.

Gegeben seien uns drei Funktionen

$$(1) \quad f(t_1) = 0$$

$$(2) \quad f(t_2) = 0$$

$$(3) \quad f(t_3) = 0$$

Daraus gewinnen wir zunächst einmal wie in §18 die beiden Gleichungen

$$(1) \quad f(t_1) = 0$$

$$(4) \quad \frac{f(t_2) - f(t_1)}{h} = 0$$

wobei

$$t_2 - t_1 = h$$

gesetzt ist. Entsprechend würde man die Formel gewinnen

$$(5) \quad \frac{f(t_3) - f(t_2)}{h} = 0 \quad \text{mit} \quad t_3 - t_2 = h$$

Diese Gleichung (5) ist aber mit (4) identisch für den Grenzübergang  $h=0$ .

Wir gewinnen nun aber leicht durch Vergleich der beiden Gleichungen (4) und (5)

$$(6) \quad \frac{\frac{f(t_3) - f(t_2)}{h} - \frac{f(t_2) - f(t_1)}{h}}{h} = 0$$

Machen wir den Grenzübergang  $h=0$ , so gehen die Gleichungen (1), (4) und (6) über in

$$(7) \quad f(t) = 0$$

$$(8) \quad f'(t) = 0$$

$$(9) \quad f''(t) = 0$$

Auf unser Problem angewandt, ergibt sich also folgendes:  
Wir haben  $\gamma$  fest zu lassen und die Gleichung (18;6) zweimal zu differenzieren. Dann erhalten wir

$$(10) \quad (\gamma - \gamma) \ddot{\xi} - 2\dot{\gamma} \dot{\xi} - \ddot{\gamma} \xi = 0$$

Wir haben also für die Rückkehrkante nunmehr die drei Gleichungen.

$$(11) \quad (\gamma - \gamma) \xi = 0$$

$$(12) \quad (\gamma - \gamma) \dot{\xi} - \dot{\gamma} \xi = 0$$

$$(13) \quad (\gamma - \gamma) \ddot{\xi} - 2\dot{\gamma} \dot{\xi} - \ddot{\gamma} \xi = 0$$

Schreiben wir wieder in Komponenten aus, so erhalten wir

$$(14) \quad \bar{y}_1 \xi_1 + \bar{y}_2 \xi_2 + \bar{y}_3 \xi_3 = a$$

$$(15) \quad \bar{y}_1 \dot{\xi}_1 + \bar{y}_2 \dot{\xi}_2 + \bar{y}_3 \dot{\xi}_3 = b$$

$$(16) \quad \bar{y}_1 \ddot{\xi}_1 + \bar{y}_2 \ddot{\xi}_2 + \bar{y}_3 \ddot{\xi}_3 = c$$

Diese Gleichungen sind die von drei Ebenen, die einen Schnittpunkt liefern, wenn sie linear unabhängig sind, wenn also

$$(17) \quad (\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}) \neq 0$$

ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist also die Existenz der Rückkehrkante gesichert.

Wir haben schon untersucht, welcher Bedingung die Führungskurve unterliegen muss, damit sie durch die Charakteristik hindurchgeht. Jetzt wollen wir die entsprechende Fragestellung für die Rückkehrkante erledigen. Da behaupten wir folgenden Satz:

Die Charakteristiken sind die Tangenten und die variablen Ebenen die Schmiegeebenen der Rückkehrkante, wenn die Rückkehrkante als Führungslinie gewählt wird.

Wenn die Führungslinie mit der Rückkehrkante zusammenfallen soll, dann muss  $\gamma$  die Gleichungen (11), (12) und (13) befriedigen. Es muss also einmal nach (12) sein

Diese Gleichung (19) wollen wir noch umformen. Differenzieren wir (18), so ist

$$\begin{aligned} & \zeta' \xi + \zeta \xi' = 0 \\ \text{oder (20)} \quad & 2 \zeta' \xi + 2 \zeta \xi' = 0 \end{aligned}$$

Subtrahieren wir (19) von (20), so ergibt sich

$$(21) \quad \zeta'' \xi = 0$$

Wir erhalten also die beiden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} (18) \quad & \zeta' \xi = 0 \\ (21) \quad & \zeta'' \xi = 0 \end{aligned}$$

Die erste Bedingung sagt aus, dass die Rückkehrkante auf den Charakteristiken verläuft. Die zweite besagt folgendes: Wir wissen, dass die beiden Vektoren  $\zeta'$  und  $\zeta''$  in jedem Punkte der Rückkehrkante die Schmiegungebene aufspannen. Es soll nun  $\xi$  senkrecht auf den beiden Vektoren stehen, also muss in jedem Punkte  $\xi$  senkrecht auf der Schmiegungebene stehen. Andererseits ist aber  $\xi$  die Normale der variablen Ebene, also muss die variable Ebene die Schmiegungebene der Rückkehrkante sein.

Wir haben nun nur noch zu zeigen, dass die Charakteristiken die Tangenten an die Rückkehrkante sind. Zu dem Zwecke betrachten wir die Gleichung (20). Daraus folgt unter Berücksichtigung von (21)

$$(22) \quad \zeta' \xi = 0$$

$\zeta'$  ist der Tangentialvektor der Rückkehrkante. Er steht also nach (18) und (22) senkrecht auf  $\xi$  und  $\xi'$ . Ich bin also fertig, wenn ich zeige, dass auch die Charakteristik auf  $\xi$  und  $\xi'$  senkrecht steht. Zu dem Zwecke sehen wir uns die Gleichungen der Charakteristik, (18, 1) und (18, 6) an. Der Richtungsvektor  $\mu$  der Charakteristik muss die Eigenschaft haben, dass, wenn ich  $y$  durch  $y+a$  ersetze, die Gleichungen erhalten bleiben. Die linken Seiten ändern sich um die Beträge  $\mu \xi$  und  $\mu \xi'$ . Es muss also, da die Gleichungen ungeändert bleiben sollen, gelten

$$(23) \quad \mu \xi = 0$$

$$(24) \quad \mu \xi' = 0$$

Also muss der Richtungsvektor der Charakteristik auf  $\xi$  und  $\xi'$  senkrecht stehen. Es ist also in jedem Punkte die Charakteristik Tangente an die Rückkehrkante.

4. Kapitel:Streifen.§20: Definitionen der Streifen.

Nachdem wir im vorigen Kapitel jedem Punkte einer Raumkurve eine beliebige Ebene angeheftet haben, wobei nur gewisse Stetigkeitsforderungen vorausgesetzt werden mussten, wollen wir uns nun mit ganz besonderen Ebenenscharen befassen. Es sei eine Raumkurve gegeben. Dann heften wir jedem Punkte der Raumkurve eine Ebene an, die nun aber die Raumkurve berührt. Wir nennen die Gesamtheit dieser Ebenen einen Streifen. Dieser Begriff des Streifens mag zunächst sehr speziell erscheinen. Er ist es aber nicht. Denken wir uns irgendeine Fläche im Raum und auf ihr eine Kurve. Denken wir uns nun den Streifen dieser Kurve hinzu, so werden, da die Ausgangsfläche ja auch die Kurve in jedem Punkte berührt (wir sehen von Singularitäten ab) die Ebenen des Streifens in jedem Punkte Tangentialebenen der Fläche sein. Daher ist der Begriff des Streifens, wie wir noch sehen werden, der Begriff des Streifens für die ganze Flächentheorie von grosser Bedeutung.

Wir gehen nun daran, einen Streifen analytisch zu charakterisieren. Es handelt sich um eine Ebenenschar. Aus den Überlegungen in §18 entnehmen wir sofort, dass die Punkte des Streifens die Bedingung erfüllen müssen

$$(1) \quad (\gamma - \zeta) \xi = 0$$

$$(2) \quad \zeta \xi = 0$$

Für die weiteren Betrachtungen wichtig ist der Begriff der konjugierten Richtung. Es ist ~~die~~ die Richtung der Charakteristik ~~im~~ ~~dem~~ ~~Streifen~~, ~~die~~ ~~konjugiert~~ zu der Richtung der Führungskurve des Streifens in dem Punkte, wo sich Charakteristik und Führungskurve schneiden.

Dieser Begriff der zu  $\zeta$  konjugierten Richtung gibt Anlass, drei besondere Arten von Streifen ins Auge zu fassen. Ist der Winkel der Charakteristik mit der Führungskurve in jedem Schnittpunkte = 0, d. h. fallen die konjugierten Richtungen zusammen, so spricht man von einem Schmiegungsstreifen oder Asymptotenstreifen. Ist der Winkel ein rechter, so ist der Streifen ein Krümmungsstreifen. Eine dritte Streifenart erhalten wir,



wenn die Streifenebene in jedem Punkte die rektifizierende Ebene der Führungskurve ist, wenn also die Normale  $\xi$  des Streifens in jedem Punkte die Hauptnormale von  $\mathcal{C}$ , der Führungskurve ist. Dann spricht man von einem geodätischen Streifen.

Durch diese Definitionen ergibt sich eine gewisse Analogie zwischen dem ersten und dritten Fall. Der erste Fall ist dadurch gekennzeichnet, dass die Charakteristiken aus den Tangenten der Kurve bestehen, dass also die Führungskurve die Rückkehrkante des Streifens ist, oder dass die Streifenebene in jedem Punkte die Schmiegungeebene der Führungskurve ist, und der dritte Fall ist dadurch gekennzeichnet, dass in jedem Punkte die Streifenebene die rektifizierende Ebene der Kurve ist.

Es mag zunächst erstaunlich erscheinen, wie man dazu kommt, gerade diese drei Sonderfälle ins Auge zu fassen. Diese Frage beantworten wir jetzt noch nicht, wir deuten die Antwort nur an. Wir hatten bei den Regelflächen drei Grössen eingeführt, den Drall, die Richtungskrümmung und die Schrotung. Das Verschwinden dieser drei Grössen hat nun für die Regelfläche ganz bestimmte Folgen. Und diese Sonderfälle decken sich in gewissem Sinne mit den eben beschriebenen Sonderfällen der Streifen.

### §21:

#### Schmiegestreifen, Krümmungsstreifen und geodätischer Streifen.

1.) Der Schmiegestreifen war dadurch charakterisiert, dass seine Ebene in jedem Punkte Schmiegungeebene der Führungskurve ist, dass also die Führungskurve die Rückkehrkante des Streifens ist. Wir haben also die Bedingungen für die Rückkehrkante heranzuziehen. Da haben wir in §19 die beiden Bedingungen gefunden

$$(19;18) \quad \dot{\xi} \xi = 0$$

$$(19;21) \quad \ddot{\xi} \xi = 0$$

In diesen beiden Bedingungen haben wir also auch die Bedingungen, dafür, dass der Streifen Schmiegestreifen ist.

3.) Beim geodätischen Streifen soll die Normale  $\xi$  des Streifens auch die Hauptnormale der Führungskurve sein. Es ergibt sich also das Problem, diese Bedingung in analytische Form zu kleiden. Wir wissen nun, dass, wenn  $\xi$  Hauptnormale ist,  $\xi$  in die Schmiegungeebene der

Kurve fallen muss. Die wird aber von den beiden Vektoren  $\xi'$  und  $\xi''$  aufgespannt. Es muss also dann  $\xi$  eine lineare Kombination von  $\xi'$  und  $\xi''$  sein, d.h.

$$(1) \quad (\xi', \xi'', \xi) = 0$$

2.) Im zweiten Falle behaupte ich zunächst, dass man die Tatsache, dass die Charakteristik senkrecht zur Richtung der Führungskurve steht, auch dahin ausdrücken kann, dass  $\xi$  eine Torse beschreibt. Diese Behauptung wird noch zu beweisen sein. Gehen wir von dieser neuen Definition des Krümmungstreifens aus, so brauchen wir uns nur an die Überlegungen zu erinnern, die wir in §16 angestellt haben. Dort haben wir als Bedingungsgleichung für die Torse gefunden

$$(2) \quad \xi' \xi = 0$$

oder auch nach (16;13)

$$(3) \quad (\xi', \xi, \xi') = 0$$

Mit diesem zweiten Falle wollen wir uns noch etwas näher befassen.

### §22:

#### Der Krümmungstreifen.

Wir haben für den Krümmungstreifen die Bedingungen gefunden

$$(1) \quad \xi' \xi = 0$$

$$(2) \quad (\xi', \xi, \xi') = 0$$

Wir wollen nun den Beweis erbringen, dass aus der zweiten Definition des Krümmungstreifens die erste folgt. Zu dem Zwecke schreiben wir (2) um als lineare Gleichung

$$(3) \quad a \xi' + b \xi + c \xi' = 0$$

Multiplizieren wir mit  $\xi$ , so erhalten wir

$$(4) \quad a \xi' \xi + b \xi^2 + c \xi' \xi = 0$$

oder wegen (1) und

$$\xi' \xi = 0$$

$$(5) \quad b \xi = 0$$

und, da  $\xi$  Einheitsvektor ist

$$(6) \quad b = 0$$

Setzen wir (6) in (3) ein, so folgt

$$(7) \quad a \xi' + c \dot{\xi} = 0$$

Wir setzen nun voraus

$$(8) \quad \xi' \neq 0$$

und

$$(9) \quad \dot{\xi} \neq 0$$

Damit schalten wir nur singuläre Fälle von der Betrachtung aus. Dann wird

$$(10) \quad \xi' + \frac{c}{a} \dot{\xi} = 0$$

Nun ist  $\xi$  die Normale einer Torse. Da liegt es auf der Hand, nach deren Rückkehrkante zu fragen, die mit ihrer Kehllinie identisch ist. Zu dem Zwecke müssen wir  $l$  bestimmen, wenn  $l$  der Abstand der Rückkehrkante von der Führungslinie ist. Zu dem Zwecke multiplizieren wir (7) mit  $\dot{\xi}$  und erhalten

$$(11) \quad a \xi' \dot{\xi} + c \dot{\xi}^2 = 0$$

Dann wird nach (11) (10)

$$(12) \quad l = - \frac{\xi' \dot{\xi}}{\dot{\xi}^2} = \frac{c}{a}$$

und (10) geht über in

$$(13) \quad \xi' + l \dot{\xi} = 0$$

Man nennt diese Gleichung die von **O r l i n d e** und **R o d r i g u e s**.

Es sei nun  $g$  eine Charakteristik der Torse. Dann wissen wir aus den Überlegungen in §18, dass die Charakteristik auf  $\xi$  und  $\dot{\xi}$  senkrecht steht. Wir können also schreiben

$$(14) \quad g = \lambda (\xi \times \dot{\xi})$$

nach (3) ist  $\dot{\xi}$  zu  $\xi'$  proportional. Also wird

$$(15) \quad g = \mu (\xi \times \xi')$$

Nun ist  $\xi \times \zeta$  ein Vektor, der auf  $\zeta$  senkrecht steht. Also ist damit die Behauptung bewiesen, dass die Charakteristik des Krümmungstreifens auf der Tangente der Führungskurve senkrecht steht. Es ist also in der Tat die zweite Definition des Krümmungstreifens auf die erste zurückgeführt.

### §23:

#### Der Satz von Joachimsthal.

Gegeben sei irgendeine Raumkurve. Wir wollen nun untersuchen, ob es zu dieser Raumkurve mehrere oder nur einen Streifen der drei Arten gibt.

Es gibt zunächst in jedem Punkte der Raumkurve nur eine einzige Schmiegeebene. Es kann also auch nur einen einzigen Schmiegestreifen geben. Ebenso ist es beim geodätischen Streifen, denn es gibt in jedem Punkte der Raumkurve nur eine einzige Hauptnormale.

Beim Krümmungstreifen ist es nun nicht mehr so. Da gibt es zu jeder Raumkurve mehrere Krümmungstreifen. Es gibt aber nun einen Satz, der diese Mannigfaltigkeit der Krümmungstreifen reguliert. Das ist der Satz von Joachimsthal:

Wenn durch eine Raumkurve zwei Krümmungstreifen hindurchgehen, dann müssen diese beiden Streifen in jedem Punkte der Raumkurve denselben Winkel einschliessen.

Eine andere Fassung des Satzes ist die folgende:

Ist ein Krümmungstreifen einer Raumkurve gegeben, und drehen wir diese Streifenebene in jedem Punkte der Raumkurve um denselben Winkel, so erhalten wir wieder einen Krümmungstreifen der Raumkurve.

Wir wollen den Satz in diesen beiden Fassungen beweisen.

1.)

Voraussetzung:  $s$  und  $t$  seien zwei Krümmungstreifen durch dieselbe Raumkurve. Die eine Streifennormale sei  $\xi$ , die andere  $\eta$ .

Behauptung: Die Streifen schliessen längs der ganzen Raumkurve denselben Winkel ein, oder, da

$$(1) \quad \xi \eta = \cos \alpha$$

heisst die Behauptung

$$(2) \quad \xi \eta = \text{const}$$

Beweis: Es genügt offenbar, zu beweisen, dass die Ableitung des inneren Produktes  $\xi \eta$  verschwindet, dass also ist

$$(3) \quad \xi' \eta + \xi \eta' = 0$$

Diese Gleichung haben wir unter Benutzung der Tatsache, dass  $\xi$  und  $\eta$  die Normalen von zwei Krümmungstreifen an dieselbe Raumkurve sind, zu beweisen. Nach der Formel von Rodrigues (22;13) ist

$$(4) \quad \xi' = \alpha \zeta'$$

und

$$(5) \quad \eta' = \beta \zeta'$$

Also wird

$$(6) \quad \xi' \eta = \alpha \zeta' \eta$$

und

$$(7) \quad \xi \eta' = \beta \zeta' \xi$$

Nach der Bedingungsgleichung des Krümmungstreifens (20;2) ist

$$(20;2) \quad \zeta' \xi = \zeta' \eta = 0$$

Also folgt auch

$$(3) \quad \xi' \eta + \xi \eta' = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

2.)

Voraussetzung:  $s$  sei ein Krümmungstreifen mit der Normalen  $\xi$ .  $\eta$  sei die Normale eines Streifens  $t$ , und es schliesse  $\eta$  mit  $\xi$  immer einen konstanten Winkel ein. Es sei also

$$(8) \quad \xi \eta = \text{const.}$$

Behauptung:

$t$  ist Krümmungstreifen an dieselbe Raumkurve wie  $s$ .

Beweis: Da  $s$  ein Krümmungstreifen ist, muss gelten

$$(9) \quad \xi' = \alpha \zeta'$$

Also ist auch

$$(10) \quad \xi' \eta = \kappa \xi' \eta = 0$$

da  $\eta$  Streifen normale ist. Ausserdem ist aber nach (8)

$$(11) \quad \xi' \eta + \xi \eta' = 0$$

Also ist

$$(12) \quad \xi \eta' = 0$$

Wir haben zu zeigen, dass  $\eta$  die Normale eines Krümmungsstreifens ist, dass also  $\eta'$  proportional  $\xi'$  ist. Es gilt immer

$$(13) \quad \eta \eta' = 0$$

denn  $\xi$  ist Einheitsvektor.  $\xi$  und  $\eta$  sind nun zwei Vektoren, die nach Voraussetzung nicht parallel sind. Also ist

$$(14) \quad \eta' \sim \xi \times \eta$$

Es genügt also zu beweisen

$$(15) \quad \xi \times \eta \sim \eta'$$

Diese Gleichung ist aber erfüllt, denn  $\xi$  und  $\eta$  stehen beide senkrecht auf der Kurventangente in jedem Punkte.

q. e. d.

Wenn wir insbesondere eine ebene Kurve betrachten, dann können wir diese Kurve immer zu einem Streifen ausbauen, indem wir die Ebene, in der die Kurve liegt, als Streifen-ebene nehmen. Das ist ein Sonderfall, der dadurch charakterisiert ist, dass  $\kappa$  über die ganze Kurve konstant ist. Die Gesamtheit der Vektoren  $\xi$  bildet dann einen Zylinder. Wir erhalten dann alle Krümmungsstreifen der Kurve, indem wir alle Zylinder aufsuchen, die mit dem erwähnten einen konstanten Winkel einschliessen und diese Zylinder als die Gesamtheit der ~~genannten~~ Normalen der gesuchten Krümmungsstreifen auffassen.

Ist uns auf der Kugel irgendeine Kurve gegeben, dann ist die Gesamtheit aller Tangentialebenen der Kurve, d. h. der Kugel in den Kurvenpunkten, ein Krümmungsstreifen. Wir erhalten also in jeder Gesamtheit von Ebenen, die mit den Tangentialebenen der Kugel in den Kurvenpunkten einen konstanten Winkel einschliessen, wieder einen Krümmungsstreifen derselben Kurve auf der Kugel.

Diese Theorie der Krümmungsstreifen findet ihre Anwendung auch in der allgemeinen Flächentheorie. Denken wir auf einer beliebigen Fläche Kurven gezogen, und denken wir uns die zugehörigen Tangentialebenen an die Fläche.

Dann nennt man Krümmungslinien solche Linien, bei denen die zugehörigen Tangentialebenen einen Krümmungstreifen bilden. Man kann nun solche Flächen aufsuchen, bei denen die Krümmungslinien etwa gerade Linien oder sphärische Kurven sind. Dann muss die Fläche die Eigenschaft haben, dass sie mit den Ebenen des Krümmungstreifens in jedem Punkte der Kurve denselben Winkel einschließt.

Damit wollen wir diese Streifentheorie abschliessen und nun zur eigentlichen Flächentheorie übergehen.

## II. ABSCHNITT:

### FLÄCHENTHEORIE .

Bisher haben wir uns immer nur mit einparametrischen Scharen von Gebilden beschäftigt. Der nächste auf der and liegende Schritt ist nun der, dass wir zu zweiparametrischen Systemen übergehen. Wir werden also unter einer Fläche eine Punkteschar verstehen, die von zwei Parametern abhängt.

#### 1. Kapitel:

#### Kurven auf Flächen, Tangentialebene, Linienelement und Flächenelement.

#### §24:

#### Darstellung einer Fläche.

Wie wollen wir eine Fläche analytisch darstellen? In rechtwinkligen Koordinaten ist die einfachste Darstellung

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

oder

$$(2) \quad z = f(x, y)$$

Diese Darstellung zieht man aber in der Flächentheorie nicht heran. In der allgemeinen Flächentheorie bezieht man den Ortsvektor eines Punktes der Fläche auf Parameter. Man macht das, weil die in (1) und (2) gegebene Darstellung von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. Und vom Koordinatensystem will man sich tunlichst frei machen. Gewöhnlich macht man es wie Gauss, der den Ortsvektor in Abhängigkeit von zwei Parametern setzt, die etwa  $u$  und  $v$  sein mögen:

$$(3) \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}(u, v)$$

Dabei wollen wir voraussetzen, dass diese Funktion so oft stetig differenzierbar ist wie wir es gerade brauchen. Dass diese Darstellung allgemeiner ist als die Darstellung

(2), folgt sofort, denn es geht (2) aus (3) hervor durch die spezielle Wahl

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= f(u, v) \end{aligned}$$

Was bedeutet nun die Gleichung (3) geometrisch?

Wenn wir uns die Fläche irgendwie realisiert denken, dann kann man daneben eine Ebene einführen, auf der  $u$  und  $v$  rechtwinklige Koordinaten sind. Dann liefert die Darstellung (3) die Abbildung eines Flächenstückes auf ein Stück der  $uv$ -Ebene. Das ist etwas Analoges zur Parameterdarstellung einer Raumkurve. Auch dort konnten wir die Parameterdarstellung dahin deuten, dass wir die Raumkurve auf eine Gerade abbilden, die von dem Parameter durchlaufen wurde. Das war aber nichts wesentlich Interessantes. Jetzt dagegen ergeben sich durch diese Auffassung interessante Probleme.

### §25:

#### Kurven auf Flächen und die Tangentialebene.

Es ist nun für die Behandlung von Flächen besonders bequem, die sogenannten *Parameterlinien*  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  herauszugreifen. Sie werden auf der Fläche ein Netz von Kurven bilden. Für  $u = \text{const}$  erhalten wir eine Kurve, die nur noch von dem Parameter  $v$  abhängt. Da haben wir schon Beispiele von Kurven auf Flächen.

Wie können wir nun allgemein eine Kurve auf einer Fläche darstellen? Da erinnern wir uns daran, dass wir sagten, dass die Parameterdarstellung der Fläche eine Abbildung auf eine  $uv$ -Ebene vermittelt. Es muss also jeder Kurve auf der Fläche eine solche in der Bildebene entsprechen. Und diese Kurve erhalten wir, indem wir  $u$  und  $v$  als Funktionen eines Parameters  $t$  auffassen, also setzen

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= u(t) \\ v &= v(t) \end{aligned}$$

Nun aber wollen wir uns für eine beliebige Kurve in der Umgebung eines festen Punktes die Tangente verschaffen. Die Kurve sei

$$(2) \quad \gamma = \gamma(t) = \gamma(u(t), v(t))$$

Dann ergibt die Kettenregel der Differentialrechnung für die Ableitung nach dem Parameter  $t$



$$(3) \quad \dot{\zeta} = \zeta_u \dot{u} + \zeta_v \dot{v}$$

Dabei sind die Ableitungen von  $\zeta$  nach  $u$  und  $v$ ,  $\zeta_u$  und  $\zeta_v$ , wohlbestimmte Vektoren, die mit dem Parameter  $t$  nichts mehr zu tun haben. Lassen wir die Gesamtheit aller Kurven ins Auge, die durch einen Punkt unserer Fläche hindurchgehen, und die Gesamtheit aller der Tangenten in diesen Punkten, so lehrt diese Darstellung, dass alle diese Tangenten durch die beiden Vektoren  $\zeta_u$  und  $\zeta_v$ , sofern diese beiden Vektoren nicht in verschiedenen Richtungen liegen, linear ausdrückbar sind. Es spannt also die Gesamtheit aller Tangenten in diesen Punkten eine Ebene auf, die Tangentialebene. Es muss also, wenn  $\eta$  der Ortsvektor irgendeines Punktes der Tangentialebene ist, der in der Ebene liegende Vektor  $\eta - \zeta$  sich linear durch die beiden Vektoren  $\zeta_u$  und  $\zeta_v$  ausdrücken lassen. Somit erhalten wir die Gleichung der Tangentialebene

$$(4) \quad (\eta - \zeta \cdot \zeta_u \zeta_v) = 0$$

Wir führen nun die Flächennormale im betrachteten Punkte, den Vektor  $\zeta$ , ein. Auch jetzt werden wir ihm die Länge 1 geben:

$$(5) \quad \zeta^2 = 1$$

Es ist nun das vektorielle Produkt  $\zeta_u \times \zeta_v$  ein Vektor, der auf der Fläche im betrachteten Punkte senkrecht steht. Es wird also

$$(6) \quad \zeta = \frac{\zeta_u \times \zeta_v}{|\zeta_u \times \zeta_v|}$$

Hinter der Tatsache, dass man eine beliebige Fläche mit dem Ortsvektor  $\zeta(u, v)$  in jedem Punkte durch eine Tangentialebene approximieren kann, steckt ein allgemeines Prinzip. Denken wir uns nämlich  $\zeta(u, v)$  an der betrachteten Stelle in die Taylorreihe entwickelt, so wird

$$(7) \quad \zeta(u, v) = \zeta_0 + u \zeta_u + v \zeta_v + \frac{u^2}{2} \zeta_{uu} + uv \zeta_{uv} + \frac{v^2}{2} \zeta_{vv} + \dots$$

Dann besagt diese Gleichung, dass die Fläche in erster Annäherung durch eine Ebene approximiert werden kann.

§26: Anwendung auf die Regelflächen.

Wir wollen diese Überlegungen auf die Regelflächen anwenden. Eine Regelfläche könnten wir darstellen in der Form

$$(1) \quad \gamma(u, v) = \xi(u) + v \zeta(u)$$

Dabei sind nur die Parameter  $t$  und  $l$  durch die Parameter  $u$  und  $v$  ersetzt. Bilden wir nun das vektorielle Produkt  $\gamma_u \times \gamma_v$ , so wird

$$(2) \quad \begin{aligned} \gamma_u \times \gamma_v &= (\xi_u + v \zeta_u) \times \zeta \\ &= \xi_u \times \zeta + v \zeta_u \times \zeta \end{aligned}$$

Es hängen also die Vektorprodukte nur von  $u$ , nicht mehr von  $v$  ab. Das hat eine anschauliche Bedeutung. Wenn wir nämlich  $u$  konstant lassen und  $v$  variieren, bekommen wir eine Gerade.

Ferner sehen wir, dass der Normalenvektor der Fläche,  $\gamma_u \times \gamma_v$ , linear aus zwei Vektoren kombiniert ist. Es ist also immer der Normalenvektor auf dem Einheitsvektor der Regelgeraden,  $\zeta$ , senkrecht. Es hat also immer die Tangentialebene die Eigenschaft, dass der Vektor  $\zeta$  in ihrer liegt. D.h. die Geraden der Regelfläche liegen immer ganz in einer Tangentialebene. Das ist anschaulich sofort erkennbar. Jede Tangentialebene berührt die Regelfläche längs einer Geraden. Schreiten wir längs dieser Geraden fort, so dreht sich die Tangentialebene um diese Gerade herum. Da erhebt sich sofort das Problem, zu untersuchen, wie weit sich diese Ebene herumdrehen kann. Wenn wir  $v$  wachsen lassen, dann wird der Einfluss des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (2) immer kleiner gegen den des zweiten. Wir bekommen also in grosser Entfernung eine Normale, die entweder die Richtung des Vektors  $\xi_u \times \zeta$  oder des Vektors  $\zeta_u \times \zeta$  hat. Es dreht sich also die Tangentialebene um den Winkel  $\pi$  herum längs einer Geraden der Regelfläche.

Wie schnell sich die Tangentialebene längs der Geraden herumdreht, das hängt nur von dem Drall der Fläche ab. Damit hängt dann zusammen, dass, wenn zwei Regelflächen längs einer Geraden denselben Drall haben, sie sich so zusammenfügen lassen, dass sie sich längs dieser Geraden berühren.

Wir wollen nun noch mehrere Sonderfälle betrachten.

Wenn gilt

$$(3) \quad \xi_u = 0,$$

Dann fällt der zweite Term auf der rechten Seite von (2) fort. Dann muss sich offenbar bei sich änderndem  $u$  der Vektor  $\xi$  parallel verschieben. Wir erhalten also einen Zylinder:

$$(4) \quad \gamma_u \times \gamma_v = \xi_u \times \xi$$

Wenn gilt

$$(5) \quad \xi = \xi_u$$

dann fällt der erste Term fort und wir erhalten

$$(6) \quad \gamma_u \times \gamma_v = \nabla \xi_u \times \xi$$

Auch jetzt ist die Tangentialebene längs einer Geraden dieselbe.

Und wenn schließlich gilt

$$(7) \quad \xi' = 0$$

dann haben wir es mit einem Kegel zu tun, es gehen die Geraden alle durch einen Punkt hindurch, aber mit verschiedenen Richtungen.

### §27: Die erste Fundamentalform.

Wir gehen nun weiter in der allgemeinen Theorie.

Da wollen wir zunächst die Schreibweise ein wenig ändern.

Wir wollen Differentiale einführen. Dann geht z.B. (25;3)

über

$$(25;3) \quad \dot{\gamma} = \xi_u \dot{u} + \xi_v \dot{v}$$

über in

$$(1) \quad d\gamma = \xi_u du + \xi_v dv$$

Diese Schreibweise hat vor der alten den Vorzug, dass in ihr nur noch die Richtungen, nicht mehr die Parameter vorkommen.

Wir wollen nun zu Masszahlen übergehen. Da erhebt sich zunächst die Frage nach den einfachsten Masszahlen einer Fläche. Das sind offenbar die Länge und der Winkel, den

zwei benachbarte Kurven miteinander bilden.

Wir wissen, dass die Länge einer Kurve durch den Ausdruck gegeben wird

$$(2) \quad \int |\dot{\gamma}| dt = \int \sqrt{\dot{\gamma}^2} dt = \int \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 dt = \int \dot{\gamma}^2$$

Es wird also die Länge einer Raumkurve durch den Ausdruck  $\dot{\gamma}^2$  reguliert. Für diesen Ausdruck interessieren wir uns. Es wird nach (1)

$$(3) \quad ds^2 = d\gamma^2 = \gamma_u^2 du^2 + 2\gamma_u \gamma_v du dv + \gamma_v^2 dv^2$$

Dieser Ausdruck ist fundamental wichtig für die Theorie der Abwicklungen und für die Geometrie. Man setzt

$$(4) \quad \gamma_u^2 = E$$

$$(5) \quad \gamma_u \gamma_v = F$$

$$(6) \quad \gamma_v^2 = G$$

und bezeichnet die Grössen  $E, F, G$  als die ersten Fundamentalgrössen einer Fläche. Die Grösse  $d\gamma^2$  bezeichnet man als die erste Fundamentalform. Es wird also die Länge einer Raumkurve zwischen den Parameterwerten  $t_0$  und  $t$

$$(7) \quad s = \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}| dt = \int \sqrt{E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2} dt$$

Diese Fundamentalform hat aber nicht nur ihre Bedeutung für die Länge von Kurven auf Flächen, sondern auch für die Winkel. Es seien in einem Punkte der Fläche zwei Richtungen gegeben

$$(8) \quad d\gamma = \gamma_u du + \gamma_v dv$$

$$(9) \quad \delta\gamma = \gamma_u \delta u + \gamma_v \delta v$$

Gesucht ist der Winkel zwischen diesen beiden Richtungen. Der ist offenbar dann gegeben, wenn wir seinen cos kennen. Es ist

$$(10) \quad d\gamma \delta\gamma = |d\gamma| |\delta\gamma| \cos \alpha = \sqrt{d\gamma^2} \sqrt{\delta\gamma^2} \cos \alpha$$

Also wird

$$(11) \quad \cos \alpha = \frac{d\gamma \delta\gamma}{\sqrt{d\gamma^2} \sqrt{\delta\gamma^2}}$$

Es ist nun

$$(12) \quad d\gamma \cdot d\gamma = f_u^2 du \delta u + f_u f_v (du \delta v + \delta u dv) + f_v^2 dv \delta v$$

oder unter Berücksichtigung von (4), (5) und (6)

$$(13) \quad d\gamma \cdot d\gamma = E du \delta u + F(du \delta v + \delta u dv) + G dv \delta v$$

Es wird also

$$(14) \quad \cos \alpha = \frac{E du \delta v + F(du \delta v + \delta u dv) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}$$

Es ist also in der Tat der Winkel zwischen zwei Kurven durch die Fundamentalgrößen gegeben.

### §28: Anwendung auf die abwickelbaren Flächen.

Wir wollen von den Überlegungen des vorigen Paragraphen Anwendungen auf die Theorie der abwickelbaren Flächen machen. Wir behaupten, dass sich abwickelbare Flächen unter Beibehaltung der Längen und Winkel auf die Ebene abwickeln lassen.

Um das zu zeigen, haben wir nur zu überlegen, dass man etwa das Bogenelement der Ebene zu dem der abwickelbaren Fläche in Beziehung setzen kann. Eine abwickelbare Fläche war definiert durch die Gleichung

$$(1) \quad \gamma = f(u) + v f_u(u)$$

Dann wird

$$(2) \quad E = (f_u + v f_{uu})^2 = f_u^2 + 2v f_u f_{uu} + v^2 f_{uu}^2 \\ = 1 + 0 + v^2 \frac{1}{\rho^2(u)} = 1 + \frac{v^2}{\rho^2(u)}$$

$$(3) \quad F = (f_u + v f_{uu}) f_u = 1 + 0 = 1$$

$$(4) \quad G = f_u^2 = 1$$

Von den drei Größen E, F und G ist also nur E variabel. In E stecken der Parameter v und die Krümmung. Dass dabei v auftritt, darf uns nicht wundern, denn v ist der Abstand eines beliebigen Punktes der Fläche von dem Punkte, in dem die zu dem betrachteten Punkte gehörige Gerade der Fläche die Führungskurve schneidet, also die Länge des Vektors  $\gamma - f$ . v hat also eine geometrische Bedeutung.

Wir wollen beweisen, dass die Fläche auf die Ebene abwickelbar ist. Zu dem Zwecke denken wir in der Ebene eine Kurve gezeichnet, die in entsprechenden Punkten

dieselbe Krümmung hat wie die Raumkurve  $\gamma(u)$ . Diese ebene Kurve sei  $\gamma^*(u)$ . Die abwickelbare Fläche, die zu dieser Kurve gehört, liegt ganz in der Ebene der Kurve  $\gamma^*$ . Dann stimmen tatsächlich die Linienelemente der Ebene und der abwickelbaren gegebenen Fläche überein, wenn ich nur dafür Sorge, dass in entsprechenden Punkten die Krümmung dieselbe ist. Dazu ist aber noch zu zeigen, dass es in der Tat zu jeder Raumkurve eine ebene Kurve gibt, die in jedem Punkte dieselbe Krümmung hat. Das werden wir erst später beweisen.

Es ist in der Tat also die Fundamentalform massgebend. Man geht in der Geodäsie nun so vor: Man gibt sich die Grössen  $E, F$  und  $G$  vor. Ganz willkürlich dürfen sie nicht sein, wie wir noch sehen werden. Zu ihnen definiert man eine zugehörige Fläche durch Linienelement und Winkel. Es gehen nun in die drei Fundamentalgrössen nur die ersten Ableitungen des Vektors  $\gamma$  ein. Es genügen also die ersten Ableitungen des Vektors  $\gamma$ , Längen und Winkel auf der Fläche zu bestimmen. Das ist anschaulich wohl plausibel aber nicht trivial.

### §29: Das Flächenintegral.

Wir setzen

$$(1) \quad W = \sqrt{EG - F^2}$$

und verstehen unter der Oberfläche einer Fläche, erstreckt über ein gewisses Areal, den Ausdruck

$$(2) \quad \Omega = \iint W \, du \, dv$$

Diese Erklärung haben wir zu begründen. Vorerst aber wollen wir bemerken, dass sich hieraus eine Einschränkung der drei Grössen  $E, F$  und  $G$  ergibt, die wir schon im vorigen Paragraphen voraussagten. Es muss nämlich, weil die Oberfläche immer eine reelle Grösse sein muss, gelten

$$(3) \quad EG - F^2 > 0$$

Nach (1) ist

$$(4) \quad W^2 = EG - F^2 = \gamma_u^2 \gamma_v^2 - (\gamma_u \gamma_v)^2 = (\gamma_u \times \gamma_v)^2$$

also

$$(5) \quad W = |\gamma_u \times \gamma_v|$$

Es geht also der Ausdruck (2) über in

$$(6) \quad \iint W \, du \, dv = \iint |\gamma_u \times \gamma_v| \, du \, dv$$

Man muss nun verlangen, dass, wenn man von dem Parameter paar  $u, v$  dem <sup>ein</sup> einem andern,  $\alpha, \beta$ , übergeht, sich der Flächeninhalt nicht ändert. Es ist nun

$$(7) \quad \int (\mathcal{E}u \times \mathcal{E}v) du dv = \int |\mathcal{E}u du \times \mathcal{E}v dv| \\ = \int \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} du \times \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} dv \right| = \int |d\mathcal{E} \times \delta \mathcal{E}|$$

Das ist nur eine formale Umformung, aber in dieser Form kann man die Definition des Flächenintegrals sofort auf ein anschauliches Bild zurückführen. Es ist nämlich der Integrand nichts anderes als der Flächeninhalt des von den Vektoren  $d\mathcal{E}$  und  $\delta \mathcal{E}$  aufgespannten Parallelogramms. Mit solchen kleinen infinitesimalen Parallelogrammen kann man die ganze Fläche überdecken.

Was uns nun interessiert, ist nun, dass dieses Integral unabhängig von der speziellen Wahl der Parameter  $u, v$  ist. Wir haben zu beweisen, dass für

$$u, v \longrightarrow \alpha, \beta$$

auch gilt

$$(8) \quad \iint W du dv = \iint W \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta = \iint W^* d\alpha d\beta$$

Zu dem Zwecke bilden wir nur mit den Parametern  $\alpha$  und  $\beta$  die Fundamentalformen  $E^*, F^*$  und  $G^*$ . Dann haben wir also nur zu beweisen

$$(9) \quad W^* = \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} = W \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}$$

Um diese Formel zu beweisen, bilden wir

$$(11) \quad \mathcal{E}\alpha = \mathcal{E}u u_\alpha + \mathcal{E}v v_\alpha; \quad \mathcal{E}\beta = \mathcal{E}u u_\beta + \mathcal{E}v v_\beta$$

Also wird

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\alpha \times \mathcal{E}\beta &= (\mathcal{E}u u_\alpha + \mathcal{E}v v_\alpha) \times (\mathcal{E}u u_\beta + \mathcal{E}v v_\beta) \\ &= \mathcal{E}u u_\alpha \times \mathcal{E}u u_\beta + \mathcal{E}u u_\alpha \times \mathcal{E}v v_\beta + \mathcal{E}v v_\alpha \times \mathcal{E}u u_\beta \\ &\quad + \mathcal{E}v v_\alpha \times \mathcal{E}v v_\beta \\ &= \mathcal{E}u u_\alpha \times \mathcal{E}v v_\beta + \mathcal{E}v v_\alpha \times \mathcal{E}u u_\beta \\ &= \mathcal{E}u u_\alpha \times \mathcal{E}v v_\beta - \mathcal{E}u u_\beta \times \mathcal{E}v v_\alpha \\ &= \mathcal{E}u \times \mathcal{E}v (u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta) \\ &= \mathcal{E}u \times \mathcal{E}v \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

q. e. d.

2. Kapitel:Krümmungen der Schnitte einer Fläche und die zweite Fundamentalf orm.§30: Der Verteilungssatz von Meusnier.

Es sei uns irgendeine Fläche gegeben. Dann ist es ein sehr wesentliches Problem, die Krümmung einer Kurve, die durch eine Ebene aus der Fläche herausgeschnitten wird, zu untersuchen. Wir werden im folgenden eine Formel, den Verteilungssatz von Meusnier, ableiten, welche die Krümmung einer derartigen Kurve reguliert und auf die Hauptkrümmung und den mit ihrer Richtung eingeschlossenen Winkel zurückführt.

Es sei die Raumkurve, die wir untersuchen wollen in der Form gegeben

$$(1) \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}(u, v)$$

Dann werden die Ableitungen

$$(2) \quad \mathcal{C}' = \mathcal{C}_u u' + \mathcal{C}_v v'$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathcal{C}'' &= \mathcal{C}_{uu} u'' + \mathcal{C}_{vv} v'' + \mathcal{C}_{uu} u'^2 + \mathcal{C}_{vv} v'^2 \\ &\quad + 2\mathcal{C}_{uv} v' u' \\ &= \frac{\xi_2}{\rho} \end{aligned}$$

Mit dieser Gleichung wollen wir uns ein wenig beschäftigen. Wir multiplizieren sie skalar mit  $\xi$ , dem Normalenvektor, und erhalten

$$(4) \quad \frac{\xi_2 \xi}{\rho} = \xi \mathcal{C}_{uu} u'' + \xi \mathcal{C}_{vv} v'' + \xi \mathcal{C}_{uu} u'^2 + \xi \mathcal{C}_{vv} v'^2 + 2\xi \mathcal{C}_{uv} u' v'$$

Nun sind  $\xi$  und  $\xi_2$  Einheitsvektoren, es ist also das skalare Produkt aus ihnen gleich dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Diesen Winkel, der also der Winkel zwischen der Flächennormalen und der Hauptnormalen der betrachteten Kurve ist, nennen wir  $\mathcal{A}$ . Es ist also

$$(5) \quad \xi_2 \xi = \cos \mathcal{A}$$

Es fallen nun auf der rechten Seite von (4) die ersten beiden Glieder fort, denn  $\mathcal{C}_u$  und  $\mathcal{C}_v$  sind Vektoren auf der Fläche, also in der Tangentialebene in dem betrachteten Punkte.  $\xi$  ist Normalenvektor, also ist

$$(6) \quad \xi \mathcal{C}_u = \xi \mathcal{C}_v = 0$$



sodass (4) übergeht in

$$(7) \quad \frac{\cos \rho}{f} = \xi \zeta_{uu} u'^2 + \xi \zeta_{vv} v'^2 + 2\xi \zeta_{uv} u'v'$$

Wir setzen nun

$$(8) \quad \xi \zeta_{uu} = L$$

$$(9) \quad \xi \zeta_{uv} = M$$

$$(10) \quad \xi \zeta_{vv} = N$$

Dann bekommt (7) die Gestalt

$$(11) \quad \frac{\cos \rho}{f} = L u'^2 + 2M u'v' + N v'^2$$

Um die Zusammenhänge klar zu machen, schreiben wir diese Gleichung um in

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{\cos \rho}{f} &= L \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\ &= \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{ds^2} \end{aligned}$$

oder nach (27;3)

$$(13) \quad \boxed{\frac{\cos \rho}{f} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}}$$

Man bezeichnet nun den Zähler dieser letzten Gleichung als die zweite Grundform der Fläche.

Wir schreiben abkürzend

$$(14) \quad \frac{\cos \rho}{f} = \frac{II}{I}$$

Es ist also die zweite Grundform eine quadratische Form in den Differentialen  $du$  und  $dv$ , die nur von der Fläche, nicht aber von der betrachteten Kurve abhängt.

In dieser Gleichung (13) steckt schon der Satz von Meusnier. Die rechte Seite hängt nur von  $L, M, N, E, F$  und  $G$ ,  $du$  und  $dv$  ab, sie reguliert die Richtung. Aus der Gleichung geht also sofort hervor, dass die Krümmung nur von der Richtung, und zwar von  $\cos \rho$  abhängt. Es genügt also, um die Krümmung einer beliebigen durch einen ebenen Schnitt hervorgerufenen Kurve in einem Punkte der Fläche zu bestimmen, die Kenntnis der Größen  $E, F, G, L, M, N$  und  $\cos \rho$ . Wir setzen

$$(15) \quad \frac{II}{I} = \frac{1}{R}$$

Dabei ist also  $\frac{1}{R}$  die Krümmung des Normalschnittes in der Richtung  $du, dv$  in dem betrachteten Punkte.

Dann geht (14) über in

$$(16) \quad \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{1}{R}}$$

Und das ist der Satz von M E R S E N N I E R .

Es genügt also in der Tat, die Betrachtung auf ebene Kurve  $\kappa$  zu beschränken.

Nun ist aber ein Ausnahmefall vorhanden. Die Gleichung (16) wird sinnlos, wenn

$$(17) \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

wird. Da haben wir zu überlegen, was diesem Ausnahmefall geometrisch entspricht.  $\vartheta$  war definiert als der Winkel zwischen der normalen Ebene im betrachteten Punkte und der Schmiegungeebene der betrachteten Kurve, d.h. der Ebene, welche die Kurve aus der Fläche heraus-schneidet. Wenn nun dieser Winkel ein rechter ist, dann ist offenbar diese Schmiegungeebene der Kurve die Tangentialebene. Wir müssen also alle Tangentialschnitte aus unserer Betrachtung herauslassen.

Abgesehen von diesem Ausnahmefalle gilt also die Formel (16). Wir haben also, wenn wir die Krümmungen sämtlicher durch einen Punkt gehenden Kurven der Fläche untersuchen, nur zu untersuchen, wie sich  $\frac{1}{R}$ , die Hauptkrümmung, ändert, wenn wir  $du$  und  $dv$  variieren. Ehe wir dazu übergehen, wollen wir uns erst noch etwas mit der zweiten Grundform beschäftigen.

### § 31: Weitere Untersuchungen über die zweite Grundform und ihre Polarform.

Da  $\xi$  die Richtung der Flächennormalen und die Grösse 1 hat, können wir es auf die Form bringen

$$(1) \quad \xi = \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{|\gamma_u \times \gamma_v|}$$

oder nach (29; 5)

$$(2) \quad \xi = \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{V}$$

Es wird also

$$(3) \quad L = \frac{(\gamma_u, \gamma_v, \gamma_{uu})}{V}$$

$$(4) \quad M = \frac{(\gamma_u, \gamma_v, \gamma_{uv})}{V}$$

$$(5) \quad N = \frac{(\gamma_u, \gamma_v, \gamma_{vv})}{V}$$

Eine weitere Umformung der Gleichungen (30;8), (30;9) und (30;10) erhalten wir, wenn wir von der Gleichung

$$(6) \quad \xi \zeta_u = \xi \zeta_v = 0$$

ausgehen. Danach ist

$$(7) \quad \xi \zeta_{uu} + \xi_u \zeta_u = 0$$

also

$$(8) \quad \xi \zeta_{uu} = -\xi_u \zeta_u$$

oder

$$(9) \quad L = -\xi_u \zeta_u$$

und entsprechend

$$(10) \quad M = -\xi_v \zeta_v$$

Um  $M$  in entsprechender Weise zu erhalten, differenzieren wir  $\xi \zeta_u$  nach  $v$ :

$$(11) \quad \xi \zeta_{uv} + \xi_v \zeta_u = 0$$

und  $\xi \zeta_v$  nach  $u$ :

$$(12) \quad \xi \zeta_{uv} + \xi_u \zeta_v = 0$$

Dann wird also

$$(13) \quad M = -\xi_u \zeta_v = -\xi_v \zeta_u$$

Von der ersten Grundform haben wir gesehen dass sie positiv definit war. Von der zweiten Grundform können wir das nicht behaupten. Wenn sie indefinit ist, dann kann sie für gewisse Richtungen verschwinden. Diese ausgezeichneten Richtungen nennt man *A s y m p t o - t e n r i c h t u n g e n*.

Ferner haben wir durch Polarisation der ersten Grundform den cosinus des Winkels zwischen zwei Kurven gefunden. Da erhebt sich das Problem, zu untersuchen, was wir durch Polarisation der zweiten Grundform bekommen. Wir wollen die Form, die durch Polarisation aus II hervorgeht, mit II' bezeichnen. Dann bezeichnet man die Richtungen, die durch

$$(14) \quad II' = 0$$

gekennzeichnet sind, als konjugierte Richtungen.

Diese Verhältnisse wollen wir näher untersuchen. Zu dem Zwecke schreiben wir die zweite Grundform in andere Gestalt um. Es ist

$$\begin{aligned} (15) \quad -II &= -L du^2 - 2M du dv - N dv^2 \\ &= (\xi_u du + \xi_v dv)(\xi_u du + \xi_v dv) \\ &= d\xi d\xi \end{aligned}$$

Dann wird die Polarform

$$\begin{aligned} -II' &= -L du \delta u - M(\delta u \delta v + \delta v \delta u) - N \delta v \delta v \\ &= (\xi_u \delta u + \xi_v \delta v)(\xi_u \delta u + \xi_v \delta v) \\ &= d\xi \delta \xi \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} -II' &= (\xi_u \delta u + \xi_v \delta v)(\xi_u du + \xi_v dv) \\ &= \delta \xi d\xi \end{aligned}$$

Es ist also

$$(16) \quad -II' = d\xi \delta \xi = \delta \xi d\xi$$

Um diese Gleichung geometrisch deuten zu können, greifen wir auf den Begriff der Charakteristik zurück. Wir konnten sie erklären als minn die Gerade, um die sich die Streifen-ebene in dem betrachteten Punkte dreht. Wir betrachten nun die Kurve, die der Richtung  $\delta$  in dem betrachteten Punkte entspricht und ihre Tangentialebene. Dann erhalten wir einen Streifen. Wir behaupten nun, dass die Richtung  $\delta$  gerade die der zu dem Streifen gehörigen Charakteristik ist. Das wollen wir beweisen. Sei der Vektor der Charakteristik  $\alpha$ , der der Führungskurve  $\xi$ , die Normale  $\zeta$ . Dann war die Charakteristik durch die Gleichung

$$(17) \quad \alpha = \lambda \zeta \times \xi'$$

definiert. Diese Gleichung können wir aber auch in der Form schreiben

$$(18) \quad \mu \xi = 0$$

$$(19) \quad \mu \xi' = 0$$

Es ist also die Richtung der Charakteristik dadurch ausgezeichnet, dass sie senkrecht auf der Normalen  $\xi$  des Streifens und auf dessen Ableitung  $\xi'$  steht. Dadurch ist, da  $\xi$  und  $\xi'$  im allgemeinen verschiedene Richtungen haben, die Richtung des Vektors  $\mu$  eindeutig festgelegt. Und nun behaupten wir, dass die Richtung  $\delta$  die der Charakteristik für den Streifen von  $d$  ist. Es gilt offenbar die Gleichung

$$(20) \quad \xi \delta \eta = 0$$

denn  $\delta \eta$  liegt in der Fläche und  $\xi$  ist die Normale. Nun ist aber nach (14), und (16)

$$(21) \quad d\xi \delta \eta = 0$$

also ist in der Tat die  $\delta$ -Richtung die der Charakteristik.  $E$  dreht sich also, wenn wir in der Richtung  $d$  weiterschreiten, die Tangentialebene um die Richtung  $\delta$ . Nun hätten wir aber auch ebensogut von der Richtung  $\delta$  als der Streifenrichtung ausgehen können, und mit Hilfe der Gleichung

$$(22) \quad \delta \xi d\eta = 0$$

anstelle (21) schliessen können. Dann erhalten wir, dass die Richtung  $d$  die der Charakteristik für den Streifen in der  $\delta$ -Richtung ist. Es ist also die Relation dual und symmetrisch. Es werden also durch das Verschwinden der Polarform von II zwei Richtungen gekennzeichnet, die zu einander konjugiert sind im angegebenen Sinn. Betrachten wir insbesondere die Asymptotenrichtungen, so sehen wir:

Die Asymptotenrichtungen sind sich selber konjugiert.

### §32: Anwendung auf die Theorie der Streifen.

Wir haben schon in §31 zu den Tangenten die Streifen hinzugenommen. Jetzt wollen wir die drei früher eingeführten Streifenarten unter dem neuen Gesichtspunkte betrachten und sie zu den neu hinzugekommenen Begriffen in Beziehung setzen.

Unter Streifen haben wir früher Gebilde verstanden,

über die längs einer ganzen Kurve etwas ausgesagt wurde. Das können wir natürlich jetzt nicht mehr aufrechterhalten. Wir müssen uns vielmehr auf die unmittelbare Umgebung eines Punktes der Fläche beschränken.

1.) Wir haben unter einem Asymptotenstreifen einen solchen verstanden, bei dem die Streifennormale die Binormale der Kurve ist. Der Asymptotenstreifen war durch die Gleichung

$$(1) \quad \frac{f'}{b} \delta' = 0$$

charakterisiert. Das heisst aber nach (31,15)

$$(2) \quad II = 0$$

Es entsprechen also den Asymptotenstreifen die Asymptotenrichtungen auf der Fläche:

Es sind die Asymptotenrichtungen einer Fläche die je-nigen Richtungen, deren zugehörige Streifen Schmiegungsstreifen oder Asymptotenstreifen sind.

2.) Wenden wir uns nun den Krümmungsstreifen zu. Da wollen wir die zweite der beiden früher gegebenen Definitionen anwenden, nämlich dass ein Krümmungsstreifen ein solcher ist, bei dem die Charakteristik senkrecht auf der Führungskurve steht. Da haben wir also solche Richtungen  $du$  und  $dv$  zu suchen, deren konjugierte Richtungen  $\delta u$  und  $\delta v$  senkrecht zu ihnen stehen. Wir müssen also solche Richtungen suchen, die gleichzeitig  $I'$  und  $II'$  annullieren. Da erhalten wir also die Bestimmungsgleichung

$$(3) \quad E du \delta u + F(du \delta v + \delta u dv) + G dv \delta v = 0$$

$$(4) \quad L du \delta u + M(du \delta v + \delta u dv) + N dv \delta v = 0$$

Wir müssen also  $du$  und  $dv$  so bestimmen, dass diese beiden Gleichungen nicht triviale Lösungen von  $\delta u$  und  $\delta v$  geben. Wenn wir  $du$  und  $dv$  festhalten, so sind diese beiden Gleichungen linear homogen in  $\delta u$  und  $\delta v$ . Und für diese beiden Gleichungen sollen wir die Lösungen suchen, für die nicht der triviale Fall  $\delta u = \delta v = 0$  eintritt. Das heisst aber, dass die Determinante der Koeffizien-

ten von  $\delta u$  und  $\delta v$  verschwinden muss:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} E du + Fdv & Fdu + Gdv \\ L du + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0$$

Wenn wir diese Determinante ausrechnen, so bekommen wir eine quadratische Gleichung, bekommen also so etwas wie eine dritte Fundamentalform. Man nennt sie aber nicht so, weil sie in einfacher Weise mit den beiden schon genannten Fundamentalformen zusammenhängt.

Wir schreiben die Gleichung (5) um in

$$(6) \quad du^2 \begin{vmatrix} E & F \\ L & M \end{vmatrix} + du dv \begin{vmatrix} E & G \\ M & N \end{vmatrix} + dv^2 \begin{vmatrix} F & G \\ M & N \end{vmatrix} = 0$$

oder auch

$$(7) \quad \begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Diese drei Darstellungen (5), (6) und (7) sind gleichwertige Darstellungen für die Krümmungsrichtungen.

Wir haben nun noch zu untersuchen, wie viele Krümmungsrichtungen es gibt. Da ist zu erwarten, dass es, wenn überhaupt, zwei geben wird, denn eine quadratische Gleichung hat, wenn überhaupt, zwei reelle Lösungen. Da können wir gleich folgendes bemerken: Wenn es überhaupt zwei reelle Lösungen gibt, dann müssen die beiden Richtungen senkrecht aufeinander stehen, denn die ~~besten~~ Richtungen  $\delta$  sind gerade so gewählt, dass sie auf den zugehörigen Richtungen  $\delta$  senkrecht stehen. Die beiden Richtungen sind ja, wie wir gesehen haben, reziprok konjugiert. Man nennt diese beiden Richtungen, die sich auf diese Weise ergeben, und von denen wir, wenn sie überhaupt existieren gesehen haben, dass sie senkrecht aufeinander stehen, die **Hauptkrümmungsrichtungen**.

Es kann nun aber auch eintreten, dass die Gleichungen identisch verschwinden. Das ist nur möglich, wenn die Größen  $E, F$  und den Größen  $L, M$  und  $N$  proportional sind, d.h. die Grundform I der Grundform II:

$$(8) \quad II \sim I$$

oder

$$(9) \quad \frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}$$

In diesem Falle sind die Lösungen der Gleichung unbestimmt. Man nennt den betrachteten Flächenpunkt dann einen **Nabelpunkt**.

3.) Gehen wir nun zum **geodätischen Streifen** über. Da wollen wir das Ergebnis nur kurz skizzieren, weil wir später bei den geodätischen Linien doch noch näher auf diese Verhältnisse eingehen müssen. Ein geodätischer Streifen war dadurch gekennzeichnet, dass die Streifennormale die Hauptnormale der Führungskurve war. Die entsprechende Gleichung war

$$(10) \quad (f', g'', \xi) = 0$$

oder auch

$$(11) \quad (f' \times g'') \xi = 0$$

oder, da

$$\xi = \frac{f_u \times g_v}{|f_u \times g_v|}$$

$$(11) \quad (f' \times g'') (f_u \times g_v) = 0$$

Wir haben nun schon gelegentlich die Gleichung

$$(12) \quad (a \times b)^2 = a^2 b^2 - (ab)^2$$

angewandt. Diese Gleichung ist nur der Sonderfall einer allgemeinen Identität

$$(13) \quad (a \times b)(c \times d) = (ac)(bd) - (ad)(bc)$$

Wenden wir diese Gleichung auf (11) an, so wird

$$(14) \quad (f' g_u)(g'' g_v) - (f' g_v)(g'' g_u) = 0$$

Diese Gleichung werden wir im Auge behalten. Wir werden später sehen, dass sie mit der kürzesten Entfernung auf einer Fläche, mit der geodätischen Linie zusammenhängt.



§33: Einführung eines tangierenden Koordinatensystems.

Gehen wir nun wieder zur Betrachtung des zweiten Grundform zurück. Wir wollen die Angelegenheit noch einmal von einer ganz anderen Seite her betrachten. Wir wollen nämlich nicht mehr das Koordinatensystem ausser Betracht lassen, sondern wollen es hinzunehmen und den Bedingungen anpassen. Wir wollen ein <sup>en</sup> Flächenpunkt betrachten, den wir als Koordinatenursprung wählen und wollen ausserdem die Tangentialebene in dem Punkte als  $xy$ -Ebene wählen. Ferner wollen wir die Annahme machen, dass die betrachtete Fläche auf der positiven Seite der  $xy$ -Ebene Punkte besitzt. Dann wollen wir  $z$  als Funktion von  $x$  und  $y$  darstellen. Wir entwickeln nach der Taylorreihe. Dann muss das konstante Glied verschwinden, weil wir den Punkt, den wir betrachten, als Koordinatenursprung wählen. Ferner muss der Koeffizient des linearen Gliedes verschwinden, weil wir die  $xy$ -Ebene als Tangentialebene gewählt haben. Die Reihenentwicklung beginnt also mit dem quadratischen Gliede. Wir setzen daher an:

$$(1) \quad z = \frac{1}{2} a x^2 + b xy + \frac{1}{2} c y^2 + R_3$$

Wir wollen die Grössen  $E, F, G, L, M$  und  $N$  berechnen. Zu dem Zwecke führen wir Parameter ein. Da ist das Bequemste

$$(2) \quad x = u$$

$$(3) \quad y = v$$

Dann können wir nämlich die alten Beziehungen einfach auf die Parameterwerte  $x$  und  $y$  übertragen. Wir berechnen die Komponenten der Vektoren zu

$$\xi_u = 1, \quad 0, \quad ax + by + R_2^1$$

$$\xi_v = 0, \quad 1, \quad bx + cy + R_2^2$$

$$\xi_{uu} = 0, \quad 0, \quad a + Q_1$$

$$\xi_{uv} = 0, \quad 0, \quad b + Q_1^1$$

$$\xi_{vv} = 0, \quad 0, \quad c + Q_1^2$$

Dann wird

$$(4) \quad E = 1 + P_2$$

$$(5) \quad F = P_2'$$

$$(6) \quad G = 1 + P_2''$$

$$(7) \quad W = 1 + P_2'''$$

Ferner wird

$$(8) \quad L = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+S_1 & S_1' & S_1'' \end{vmatrix} = a + S_1''$$

$$(9) \quad M = b + T_1$$

$$(10) \quad N = c + T_1'$$

und daraus ergibt sich unter Vernachlässigung höherer Glieder

$$(11) \quad I = du^2 + dv^2$$

$$(12) \quad II = a du^2 + 2b du dv + c dv^2$$

Die Grössen  $L, M$  und  $N$  sind vom Koordinatensystem unabhängig, die Grössen  $a, b$  und  $c$  dagegen nicht. Wenn wir aber unser Koordinatensystem zweckmässig wählen, dann werden diese beiden Grössensysteme gleich. Wenn wir den betrachteten Punkt also gerade in den Ursprung des Koordinatensystemes legen, dann werden die Grössen  $L, M$  und  $N$  gerade die Koeffizienten in (12).

### §34: Die Dupinsche Indikatrix.

Aus diesen Überlegungen heraus können wir die Frage stellen: Wenn wir in einem Punkte der Fläche die Tangentialebene als  $xy$ -Ebene wählen, dann schneidet eine dieser Tangentialebene benachbarte Ebene aus der Fläche eine Kurve heraus. Denken wir nun die benachbarte Ebene immer näher an die Tangentialebene heranrückend und gleichzeitig in der Ebene eine Ähnlichkeitstransformation ausgeführt, so dass die Schnittfigur nicht beliebig klein wird, so wird diese Schnittfigur in der Grenze gegen eine bestimmte Grenzlage gehen, und diese Grenzlage bezeichnet man als die Dupinsche Indikatrix. Und zwar wählt man als Dupinsche Indikatrix eine Kurve der Form

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = \pm 1$$

Das ist ein Kegelschnitt. Wenn die linke Seite positiv

definit ist, wenn also

$$(2) \quad ac - b^2 > 0$$

ist, kann rechts nur das positive Vorzeichen stehen und wir bekommen eine *Ellipse*, deren Achsen allerdings gegen die  $x$ - und  $y$ -Achse gedreht sein können wegen des gemischt quadratischen Gliedes. Aber jedenfalls ist der Ursprung der Mittelpunkt der Ellipse. (Figur 4.)

Ist

$$(3) \quad ac - b^2 = 0,$$

dann erhalten wir als Indikatrix ein *Geradenpaar*, das symmetrisch zum Ursprung liegt unter irgendeinem Winkel gegen die Achsen. (Figur 5).

Und ist endlich

$$(4) \quad ac - b^2 < 0,$$

so wird die Indikatrix ein *Hyperbelpaar* je nach dem, ob recht positives oder negatives Vorzeichen steht. Die Asymptoten der Hyperbel erhalten wir, indem wir in der Gleichung der Indikatrix auf der rechten Seite  $\pm 1$  durch 0 ersetzen. (Fig. 6).

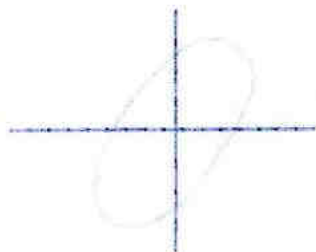


Fig. 4

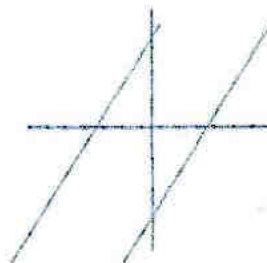


Fig. 5

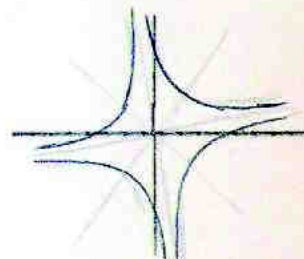


Fig. 6

Man nennt daher die drei Fälle *elliptisch*, *parabolisch* und *hyperbolisch*. Da nun, wie wir am Schluss des vorigen Paragraphen festgestellt haben, gilt

$$a = L$$

$$b = M$$

$$c = N,$$

heissen die Bedingungsgleichungen für die drei Fälle

- (5)  $LN - M^2 > 0$       elliptisch  
 (6)  $LN - M^2 = 0$       parabolisch  
 (7)  $LN - M^2 < 0$       hyperbolisch.

Im elliptischen Falle liegen die Punkte der Fläche auf derselben Seite der Tangentialebene, im hyperbolischen Fall zu beiden Seiten der Tangentialebene. Beim parabolischen Fall kann man da nichts Näheres angeben. Da gibt es mehrere Uebergänge.

Legen wir durch den Nullpunkt des Koordinatensystems eine zur Fläche normale Ebene, so sind die Schnitte dieser Ebene mit der Fläche gegeben durch die Gleichung  
 (8)

$$\frac{x}{y} = \text{const.}$$

Führen wir Polarkoordinaten

$$(9) \quad x = r \cos \rho$$

$$(10) \quad y = r \sin \rho$$

ein, so besagt (8), dass  $\rho$  konstant sein soll. Dann bekommen wir eine quadratische Form in  $\rho$ , multipliziert mit  $r^2$ . Sie gibt die Stellung der Normalebene an. Es wird dann

$$(11) \quad z = \frac{1}{2} (a \cos^2 \rho + b \cos \rho \sin \rho + \frac{1}{2} c \sin^2 \rho) r^2$$

Setzen wir nun

$$(12) \quad a \cos^2 \rho + b \cos \rho \sin \rho + c \sin^2 \rho = \frac{1}{R}$$

so wird

$$(13) \quad z = \frac{1}{2R} r^2$$

Das ist in der  $zr$ -Ebene eine Parabel. Wählen wir insbesondere

$$(14) \quad z = 1,$$

so wird

$$\frac{1}{2R} r^2 = 1$$

oder

$$(15) \quad r = \sqrt{2R}$$

Es liefert also in diesem Falle die Dupinsche Indikatrix mit dem Abstand vom Nullpunkte den Krümmungsradius für den betrachteten Punkt.

Die Dupinsche Indikatrix liefert also einmal den Schnitt mit der benachbarten Ebene und ferner den Krümmungsradius, allerdings nicht ihn selbst, sondern die Wurzel aus dem doppelten Krümmungsradius.

Die Asymptotenrichtungen erhalten wir dann für  $R = \infty$ .

### §35: Der Eulersche Satz.

Wir können nun durch eine Drehung des Koordinatensystemes den Kegelschnitt (34;1) auf seine Hauptachsen transformieren. Wir wollen den Kegelschnitt also so drehen, dass seine Hauptachsen in die  $x$ - und  $y$ -Achse fallen. Dann nimmt seine Gleichung die Gestalt an

$$(1) \quad z = \frac{1}{2} A x^2 + \frac{1}{2} C y^2 + R_3$$

Wir behaupten nun, dass  $A$  und  $C$  die Krümmungen in den Hauptkrümmungen sind.

Aus der Geometrie ist folgendes bekannt: Das Verschwinden der Polarform eines Kegelschnittes, der in der Gestalt (1) geschrieben wird, gibt gerade die Darstellung konjugierter Durchmesser. Das sind Durchmesser des Kegelschnittes, welche die Eigenschaft haben, dass der eine Durchmesser parallel zu der Tangente ist, die zum andern gehört. Diese konjugierten Durchmesser schliessen im allgemeinen einen von einem rechten verschiedenen Winkel ein, und sie schliessen gerade dann einen rechten Winkel ein, wenn sie die Hauptachsen des Kegelschnittes sind. Dann hat auch gleichzeitig der Abstand vom Nullpunkte einen Extremwert. Diese letzte Tatsache wollen wir nicht einfach aus der Geometrie übernehmen, sondern hier besonders beweisen. Wir haben nach einer Relation zu suchen, die Aufschluss darüber gibt, wann die Kurve einen Extremwert annimmt. Nach (30;15) ist

$$(2) \quad \frac{1}{R} = \frac{L du^2 + 2 M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2}$$

Setzen wir

$$(3) \quad \frac{du}{dv} = f$$

so wird aus (2)

$$(4) \quad (E - R L) f^2 + 2 (F - R M) f + G - R N = 0$$

Wir haben nun  $f$  so zu wählen, dass  $R(f)$  einen Extremwert annimmt. Zu dem Zwecke haben wir die Stellen aufzusuchen, für die

$$(5) \quad \frac{dR}{d\gamma} = 0$$

ist. Wir haben also (4) nach  $\gamma$  zu differenzieren an der betreffenden Stelle. Wir können also für diese Stelle  $R$  als konstant ansehen bei der Differentiation und erhalten

$$(6) \quad (E - R M) \gamma + F - R N = 0$$

Damit haben wir in (4) und (6) zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten  $\gamma$  und  $R$ . Multiplizieren wir (6) mit  $\gamma$  und subtrahieren dann von (4), so folgt

$$(7) \quad (F - R M) \gamma + G - R N = 0$$

Wir können also anstelle von (4) und (6) auch (6) und (7) betrachten. Damit diese beiden Gleichungen nach  $\gamma$  auflösbar sind, muss gelten

$$(8) \quad \begin{vmatrix} E-RL & F-RM \\ F-RM & G-RN \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung ist von  $\gamma$  frei und liefert  $R$ .

Nun können wir andererseits (6) und (7) in der Form schreiben

$$(9) \quad -R(L \gamma + M) + E \gamma + F = 0$$

und

$$(10) \quad -R(M \gamma + N) + F \gamma + G = 0$$

Da diese Gleichungen nach  $R$  auflösbar sein sollen, muss gelten

$$(11) \quad \begin{vmatrix} L \gamma + M & E \gamma + F \\ M \gamma + N & F \gamma + G \end{vmatrix} = 0$$

Oder nach (3), wenn wir mit  $dv$  multiplizieren,

$$(12) \quad \begin{vmatrix} Edu+Mdv & Edu+Fdv \\ Mdu+Ndv & Edu+Gdv \end{vmatrix} = 0$$

Damit haben wir in (8) und (12) zwei Relationen für Hauptkrümmung und Hauptkrümmungsrichtungen gefunden. Die Gleichung (12) entspricht genau der Gleichung (32;5). Wir sehen also, dass in der Tat die Forderung der extremalen Krümmung auf die Hauptkrümmungen führt.

Wenn wir nun die Hauptkrümmungsrichtungen aus Koordinatenachsen einführen, dann vereinfacht sich (12) zu

$$(13) \quad \frac{1}{R} = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi$$

Dabei ist  $\varphi$  die Neigung der betrachteten Kurve gegen die Hauptkrümmungsrichtungen. Wenn diese Neigung 0 oder  $\frac{\pi}{2}$  wird, dann wird  $\frac{1}{R} = A$  bzw.  $\frac{1}{R} = B$ . Dann bekommen wir gerade die Hauptkrümmungsrichtungen. Nennen wir nun die Krümmung in diesen beiden Richtungen  $\frac{1}{R_1}$  und  $\frac{1}{R_2}$ , so wird also

$$(14) \quad A = \frac{1}{R_1} \quad B = \frac{1}{R_2}$$

und (13) geht über in die Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi$$

Damit haben wir das E U L E R'sche Gesetz der Verteilung der Krümmung als Funktion der Richtung abgeleitet. Mit diesem Gesetz müssen wir uns noch vertraut machen. Wenn  $R_1$  und  $R_2$  dasselbe Vorzeichen haben, wenn also

$$(16) \quad \frac{1}{R_1 R_2} > 0$$

ist, dann haben wir es mit dem elliptischen Fall zu tun. Ist dagegen

$$(17) \quad \frac{1}{R_1 R_2} < 0,$$

haben also  $R_1$  und  $R_2$  verschiedene Vorzeichen, dann liegt der hyperbolische Fall vor.

### §36: Die Mittlere und die Gaussische Krümmung.

Wir haben nun die Aufgabe, den Charakter der Gleichung (35; 15) zu erkennen, ohne uns die Mühe zu machen,  $R_1$  und  $R_2$  auszurechnen. Wir wissen, dass  $R_1$  und  $R_2$  Wurzeln von (35; 8) sind. Schreiben wir die Determinante als, so wird

$$(1) \quad R^2(LN - M^2) - R(LG + NE - 2MF) + EG - F^2 = 0$$

Dividieren wir durch  $R^2$ , so wird

$$(2) \quad \frac{1}{R^2} (EG - F^2) - \frac{1}{R} (LG + NE - 2MF) + LN - M^2 = 0$$

Setzen wir

$$(3) \quad \frac{1}{2} \frac{LG + NE - 2MF}{EG - F^2} = H$$

und

$$(4) \quad \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K,$$

so wird aus (2)

$$(5) \quad \frac{1}{R^2} - 2H \frac{1}{R} + K = 0$$

Da  $R_1$  und  $R_2$  Lösungen dieser Gleichung sind, muss, da diese quadratische Gleichung in  $R$  normiert ist, sein

$$(6) \quad \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right) = 0$$

oder

$$(7) \quad \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{R_1 R_2} = 0$$

Durch Koeffizientenvergleichung mit (5) erhalten wir

$$(8) \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$(9) \quad K = \frac{1}{R_1 R_2}$$

Man nennt  $H$  die m i t t l e r e K r ü m m u n g und  $K$  die G a u s s i s c h e K r ü m m u n g. Wir brauchen also, wenn wir uns mit den Größen  $H$  und  $K$  begnügen,  $R_1$  und  $R_2$  nicht explizite auszurechnen. Wir können nunmehr den elliptischen und den hyperbolischen Fall so unterscheiden:

$$K > 0 \quad \text{elliptischer Fall}$$

$$K < 0 \quad \text{hyperbolischer Fall.}$$

Für die Asymptotenrichtungen ist die Krümmung offenbar Null. Wir erhalten also die Asymptotenrichtungen durch die Bedingungsgleichung

$$(10) \quad \frac{1}{R_1} \cos^2 \gamma + \frac{1}{R_2} \sin^2 \gamma = 0$$

Dabei ist  $\gamma$  die Neigung der Asymptotenrichtung gegen die Hauptkrümmungsrichtung. Aus (10) folgt

$$\operatorname{tg}^2 \gamma = -\frac{R_2}{R_1}$$

also

$$(11) \quad \operatorname{tg} \gamma = \pm \sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

Das heisst aber, dass die Hauptrichtungen den Winkel zwischen den Asymptotenrichtungen halbieren.



Ist insbesondere

$$R_1 = -R_2,$$

so bilden die Asymptotenrichtungen einen rechten Winkel miteinander. Verschwindet  $R_2$ , dann fallen die beiden Asymptotenrichtungen zusammen in einer der Hauptrichtungen. Und damit haben wir zugleich die Auszeichnung des parabolischen Falles. Es muss eine Hauptkrümmung verschwinden, oder auch es muss die Gaussische Krümmung verschwinden. Es ist also nur eine Asymptotenrichtung vorhanden. Das kann nun ganz verschiedene Typen von Flächen geben, weil die zweite Hauptkrümmung noch verschiedene Werte annehmen kann.

Bezeichnen wir den Winkel, den die Asymptoten einschließen, mit  $\alpha$ , so wird

$$(12) \quad \varphi = \frac{\alpha}{2}$$

und nach (11) wird

$$(13) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

Betrachten wir etwa den Fall der elliptischen Indikatrix. Es ist der Flächeninhalt der Ellipse gleich dem  $2\pi$  fachen des Produktes aus den beiden Hauptradien. Diese Hauptradien drücken sich aber durch die Hauptkrümmungsradien aus. Es wird der Flächeninhalt der Ellipse

$$(14) \quad F = \sqrt{R_1 R_2} \cdot \text{const}$$

Wenden wir nun auf die Ellipse eine Achsentransformation an, so muss der Flächeninhalt erhalten bleiben, die Hauptrichtungen gehen aber in konjugierte Richtungen über. Es wird

$$(15) \quad F = \text{const} \sqrt{R R'} \sin \beta$$



Fig. 7



Fig. 8

also

$$(16) \quad \frac{1}{RR'} = \frac{\sin^2 \beta}{R_1 R_2} = \frac{\sin^2 \beta}{K}$$

§37: Anwendung auf ausgezeichnete Richtungen.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Fundamentalgrößen sich spezialisieren, wenn wir besonders einfache Koordinatensysteme wählen.

1.) Wie können wir z.B. erkennen, ob das Koordinatensystem orthogonalt ist? Es gilt dann offenbar

$$(1) \quad f_u \delta_v = 0$$

d.h. aber

$$(2) \quad F = 0$$

Es ist also das Verschwinden der Fundamentalgrösse notwendig für Orthogonalität des Koordinatensystems.

2.) Wir wollen das Koordinatensystem so wählen, dass die Geraden  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  ein konjugiertes Netz ergeben. Da haben wir nun gesehen, dass dafür notwendig ist, dass die Polarform von II verschwindet. Wenn  $f_u$  zu  $f_v$  konjugiert sein soll, so muss also etwa sein

$$(3) \quad d\gamma \delta \delta = 0$$

Jetzt haben wir als  $d$ - und  $\delta$ -Richtungen die Richtungen  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  zu nehmen. Wir erhalten also als Bedingung dafür, dass die Koordinatenachsen konjugiert sind, die Gleichung

$$(4) \quad \delta_u \xi_v = 0$$

also

$$(5) \quad M = 0$$

3.) Von den Krümmungsrichtungen haben wir gesehen, dass sie gleichzeitig konjugiert und senkrecht zueinander sind. Es muss also für die Krümmungsrichtungen gelten

$$(6) \quad F = M = 0$$

Dann wird aus der Gaussischen Krümmung nach (36;4)

$$(7) \quad K = \frac{LN}{EB}$$

Wir behaupten

$$(8) \quad \frac{L}{E} = \frac{1}{R_1} ; \quad \frac{N}{G} = \frac{1}{R_2}$$

Das geht aber sofort aus der Entwicklung für  $\varepsilon$  (35;1) hervor. Dort werden die Koeffizienten, von denen wir gesehen haben, dass sie die Hauptkrümmungen  $\frac{1}{R_1}$  und  $\frac{1}{R_2}$  waren, gerade diese Grössen.

4.) A s y m p t o t e n r i c h t u n g e n : Es sei etwa  $v = \text{const}$  Asymptotenrichtung. Da haben wir nun die Bedingung gefunden

$$(9) \quad d\varepsilon \, d\xi = 0$$

Daraus wird in unserem Falle

$$(10) \quad \xi = \xi_u = 0$$

also

$$(11) \quad L = 0$$

Dann wird also nach (36;4) die Gaussische Krümmung

$$(12) \quad K = \frac{-M^2}{EG - F^2}$$

Es sind also die Asymptotenrichtungen nur dann reell, wenn die Gaussische Krümmung negativ ist, denn der Nenner von (12) ist definit.

### §38: Beispiele.

(Translationsflächen)

Wir wollen unsere Überlegungen in den letzten beiden Paragraphen auf eine bestimmte Klasse von Flächen, auf die T r a n s l a t i o n s f l ä c h e n, anwenden. Sie sind dadurch definiert, dass der Ortsvektor sich in der Form schreiben lässt

$$(1) \quad \gamma(u, v) = \frac{1}{2} (\gamma(u) + \gamma(v))$$

bzw.

$$(2) \quad \gamma(u, v) = \gamma(u) + \gamma(v)$$

Die geometrische Interpretation dieser Flächen ist folgende: Wir denken uns zwei Kurven  $\gamma(u)$  und  $\gamma(v)$ . Wir greifen aus jeder Kurve einen Punkt heraus und suchen den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke. Wir betrachten

die Gesamtheit aller dieser Mittelpunkte. Das gibt eine zweiparametrische Kurvenschar, eine Fläche. Wenn wir von dieser Interpretation der Translationsfläche ausgehen, bekommen wir sie in der Form (1).

Eine andere geometrische Deutung der Translationsfläche ist folgende: Wir denken uns eine Kurve  $\gamma(u)$  und denken diese Kurve parallel zu sich selbst auf der Kurve  $\gamma(v)$  verschoben. Dann überträgt sie eine Fläche. Und dann bekommen wir die Translationsfläche in der Fasung (2). Das einfachste Beispiel einer Translationsfläche ist eine Ebene. Wir setzen

$$(3) \quad \begin{aligned} \gamma'' &= 1 \\ \gamma'^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dann wird

$$(4) \quad E = 1$$

$$(5) \quad G = 1$$

$$(6) \quad F = \gamma'(u) \gamma'(v)$$

Ferner wird

$$(7) \quad \epsilon = \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{|\gamma_u \times \gamma_v|} = \frac{\gamma' \times \gamma'}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\gamma' \times \gamma'}{W} = \frac{\gamma' \times \gamma'}{\sqrt{1 - (\gamma')^2}}$$

und wir erhalten für die Fundamentalgrößen L, M und N.

$$(8) \quad \begin{aligned} L &= \frac{1}{W} \epsilon \delta_{uu} = \frac{1}{W} (\delta_u, \delta_u, \delta_{uu}) \\ &= \frac{1}{W} (\gamma', \gamma', \gamma'') \end{aligned}$$

$$(9) \quad N = \frac{1}{W} (\gamma', \gamma', \gamma'')$$

und

$$(10) \quad M = 0$$

Die letzte Gleichung besagt nach den Überlegungen in §37, dass die erzeugenden Kurven auf der Fläche ein konjugiertes Netz bilden.

Betrachten wir nun die Schaar von Translationsflächen, die durch Streckung aus einer Translationsfläche hervorgehen:

$$(11) \quad \delta(u, v) = \alpha \gamma(u) + \beta \gamma(v)$$

Alle diese Flächen sind Translationsflächen, aber von verschiedener Gestalt. Sie sind aber ähnlich zueinander und durch parallele Normale aufeinander bezogen, d. h. in

entsprechenden Punkten sind die Normalen, also auch die Tangentialebenen parallel. Setzen wir nun insbesondere

$$(12) \quad \alpha/\beta = 1,$$

so behaupten wir, dass die Flächen in entsprechenden Punkten auch die gleiche Gaussische Krümmung haben. Das wollen wir beweisen.

Es ist

$$(13) \quad K = \frac{L N - M^2}{E G - F^2}$$

Es genügt also zu zeigen, dass in entsprechenden Punkten zweier derartiger Translationsflächen Zähler und Nenner von (13) übereinstimmen. Das zeigt man nun so:

Bei der Streckung tritt aus L der Faktor  $\alpha^2/\beta^2$ , aus N der Faktor  $\beta^2/\alpha^2$  heraus, zusammen also  $\alpha^2/\beta^2 \cdot \beta^2/\alpha^2 = 1$ . Genau so ist es mit den übrigen Grössen. Also ist in der Tat bei allen diesen Flächen die Gaussische Krümmung in entsprechenden Punkten gleich. Es wäre nun ein Irrtum, anzunehmen, dass in entsprechenden Punkten auch die Binärelemente gleich wären.

§39: Torse und Zylinder als Regelflächen  
mit verschwindender Gaussischer  
Krümmung.

Wenn man auf einer Fläche diejenigen Kurven aufsucht, die in allen ihren Punkten die Richtung der Asymptoten haben, so nennt man diese Kurven **A s y m p t o t e n l i n i e n**. Denken wir uns ein Richtungsfeld

$$(1) \quad L u'^2 + 2 M u' + N = 0$$

gegeben, dabei ist

$$(2) \quad u' = \frac{du}{dv}$$

gesetzt. Unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen über die drei Grössen L, M und N besitzt diese Gleichung immer eine Lösung

$$u = u(v)$$

oder

$$(3) \quad f(u, v) = 0$$

Dabei läuft also durch jeden Punkt der Fläche eine Kurve. Nehmen wir nun ein zweites Richtungsfeld hinzu, dann laufen durch jeden Punkt der Fläche zwei derartige Kurven. Wir können dann offenbar diese beiden Kurvenscharen als Parameterlinien auf der Fläche wählen. Wählen wir nun insbesondere die Asymptotenlinien, so erhalten wir also die Asymptotenrichtungen als Parameterrichtungen.

Ähnlich ist es mit den konjugierten Netzen. Wenn wir in einem Punkte der Fläche eine Richtung vorgeben, so ist ihr eine und nur eine konjugierte dadurch dass ihre Polarform verschwindet, zugeordnet. Denken wir nun eine Kurvenschar auf der Fläche gezeichnet und fassen wir die Richtung in jedem Punkte ins Auge, und zeichnen wir uns nun die konjugierten Richtungen auf, so erhalten wir ein zweites Richtungsfeld, eine zweite Differentialgleichung, deren Lösung ein zweites Kurvensystem liefert. Man erhält also zu jeder Kurvenschar eine konjugierte Kurvenschar. Das Ganze nennen wir ein *k o n j u g i e r t e s N e t z*. Auch dieses Netz können wir als Parameternetz einführen. Das ergibt gewisse Vereinfachungen, von denen wir schon in §37 gesprochen haben.

Wir wollen uns nun die Frage stellen: Wann verschwindet auf einer Regelfläche die Gaussische Krümmung? Für die Regelfläche wird die Gaussische Krümmung nach (37;12)

$$(4) \quad K = \frac{-M^2}{W^2}$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur für  $M = 0$ . Nun ist nach Definition

$$(5) \quad M = \xi \zeta_{uv}$$

Wählen wir die Form

$$(6) \quad \xi(u, v) = y(u) + v \eta(u)$$

als Darstellung der Regelfläche, so wird

$$(7) \quad \xi_{uv} = \eta'$$

Es wird nun nach (31;4)

$$(31;4) \quad M = \frac{(\xi_u, \xi_v, \xi_{uv})}{W}$$

Nach (6) wird

$$(8) \quad \begin{aligned} \zeta_v &= \eta(u) \\ \zeta_u &= \eta'(u) + v \eta' \end{aligned}$$

Da  $\eta$  schon in  $\zeta_v$  auftritt, können wir es in der Determinante in  $\zeta_u$  unterdrücken und erhalten somit für  $M$

$$(9) \quad M = \frac{1}{W} (\eta', \eta, \eta')$$

Diese Determinante, die hier auftritt, ist aber gerade der Ausdruck, der bei einer Regelfläche entscheidet, ob zwei benachbarte Geraden sich schneiden oder nicht. Er tritt nämlich in dem Ausdruck für den Drall in Nenner auf. Wir haben ja für den Drall gefunden

$$(15; 12) \quad \delta = \frac{\eta'^2}{(\eta', \eta, \eta')}$$

Damit ist also bewiesen, dass die Gaussische Krümmung nur dann verschwindet, wenn für die Fläche

$$(10) \quad \frac{1}{\delta} = 0$$

ist, wenn also die Fläche eine Torse ist. Nun könnte aber auch  $\eta'$  verschwinden, dann würde die Gleichung (10) nicht notwendig folgen können.  $\eta' = 0$  bedeutet aber, dass die Vektoren  $\eta$  konstante Richtung haben, dass also die Regelfläche ein Zylinder ist. Es gibt also nur die beiden Fälle Torse und Zylinder. Beim Zylinder müssen wir dabei noch den Kegel als Entartung zulassen, denn es könnte sein, dass die Führungskurve  $\eta$  auf 0 zusammenschrumpft.

#### §40: Allgemeine Untersuchungen an Flächen mit verschwindender Gaussischer Krümmung.

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, wann die Gaussische Krümmung verschwindet. Ich behaupte, dass wir auch bei dieser allgemeinen Untersuchung nur auf Torsen und Zylinder kommen. Das wollen wir beweisen. Da unterscheiden wir zwei Fälle. Wir wissen, dass die Gaussische Krümmung nur dann verschwindet, wenn eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet. Es können aber auch beide verschwinden. Wir müssen also zwischen den beiden Fällen unterscheiden, dass nur eine Hauptkrümmung verschwindet und dass beide Hauptkrümmungen verschwinden.

1.) Es sei

$$(1) \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$$

Dann erinnern wir uns an die Eulerschen Formeln

$$(35; 15) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi = 0$$

Dabei ist  $\varphi$  der Winkel, der von der betrachteten Kurve mit den Hauptkrümmungsrichtungen eingeschlossen wird. Wir bringen nun die betrachtete Fläche mit einer Ebene zum Schnitte. Dann wird die Schnittkurve eine ebene Kurve werden mit der Krümmung Null, also eine Gerade, wie wir auch die Schnittebene wählen mögen. Also ist die betrachtete Fläche eine Ebene. Wir sehen also

Verschwinden bei einer Fläche beide Hauptkrümmungen identisch, so ist die Fläche eine Ebene.

2.) Es sei etwa

$$(2) \quad \frac{1}{R_2} \neq 0$$

$$(3) \quad \frac{1}{R_1} = 0$$

in der Umgebung eines Punktes. Wir fassen nun die Richtungen ins Auge, in denen die Krümmung extreme Werte annimmt. Ein Extremwert für die Krümmung ist der Wert 0. Es gibt also eine Richtung in der Umgebung des Punktes, in der die Krümmung verschwindet. Das gilt für jeden Punkt. Das ergibt ein Richtungsfeld, das wir integrieren können. Dann bekommen wir gewisse Linien,

$$u = \text{const},$$

die so beschaffen sind, dass sie in jedem Punkte gerade die Richtung haben, für die  $\frac{1}{R_1} = 0$  ist. Diese Linien haben nun eine doppelte Eigenschaft, ich behaupte nämlich, dass sie gleichzeitig Krümmungslinien und Asymptotenlinien sind. Das folgt unmittelbar. Da  $\frac{1}{R_1}$  Extremwert ist, sind sie Krümmungslinien, und da die  $1$ -Krümmung ~~xxxxxxx~~ verschwindet, sind sie Asymptotenlinien. Diese doppelte Eigenschaft darf uns nicht wundern. Wir haben ja gesehen, dass die Hauptkrümmungsrichtungen den Winkel zwischen den Asymptotenrichtungen halbieren. Nun ist der Winkel zwischen den Asymptotenrichtungen umso spitzer, je mehr das Verhältnis  $\frac{R_2}{R_1}$  von 1 verschieden ist. Wir hatten ja

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{-R_2}{R_1}}$$

Es wird also  $\alpha = 0$  für  $\frac{1}{R_1} = 0$ . Es fallen also die Asymp-



totenrichtungen und die Hauptkrümmungsrichtungen zusammen.

Auf diesen Linien  $u = \text{const}$  variiert  $v$ . Da es sich um Krümmungslinien handelt, können wir die Formeln von Rodrigues anwenden:

$$(4) \quad \xi_v + R \eta_v = 0$$

und da es sich um Asymptotenlinien handelt, gilt nach Definition des Asymptotenstreifens:

$$(5) \quad \eta_v \xi_v = 0$$

Die Gleichung (4) besagt, dass der Vektor  $\xi_v$  parallel dem Vektor  $\eta_v$  ist, die Gleichung (5), dass  $\xi_v$  senkrecht zu  $\eta_v$  ist. Da  $\eta_v$  nicht verschwinden kann, kann also nur sein

$$(6) \quad \xi_v = 0$$

Das kann man auch formelmäßig ausrechnen: Aus (4) ergibt sich durch Multiplikation mit  $\eta_v$ :

$$\eta_v \xi_v = -R \eta_v^2$$

also nach (5)

$$(7) \quad R \eta_v^2 = 0$$

also

$$R = 0$$

oder nach (4)

$$(8) \quad \xi_v = 0$$

Es ist also  $\xi$  nur von  $u$  abhängig, längs einer Kurve  $u = \text{const}$  ist es also immer dieselbe Normale. Das können wir auch so fassen: Der betrachtete Streifen längs der Kurve  $u = \text{const}$  ist eben. Er hat immer dieselbe Tangentialebene. Es wird also die Gesamtheit der Tangentialebenen eine einparametrische Ebenenschar mit dem Parameter  $u$ .

Es wird also

$$\xi = \xi(u)$$

Unser betrachtetes Flächenstück wird also von einer einparametrischen Ebenenschar eingehüllt. Das ist aber nur bei Torsen, Ebenen und Zylindern der Fall. Damit haben wir allgemein bewiesen:

Verschwindet auf einer Fläche die Gaussische Krümmung, so ist sie eine Torse, eine

Ebene oder ein Zylinder.

#### §41: Krümmungsrichtungen.

Wir wollen nun näher auf die Krümmungslinien eingehen. Da wollen wir zunächst untersuchen, wie die Krümmungslinien auf Rotationsflächen verlaufen. Eine Rotationsfläche entsteht, wenn eine Kurve um eine Achse rotiert. Ich behaupte nun, dass die Krümmungslinien die Meridiane und Breitenkreise sind. Dabei sind die Meridiane und Breitenkreise definiert als die Schnitte mit Ebenen, die durch die Achse hindurchgehen oder sie senkrecht schneiden.

Wir haben nun früher gesehen, dass zwei Krümmungsstreifen an dieselbe Kurve immer denselben Winkel einschliessen und haben auch umgekehrt gezeigt, dass, wenn von zwei ~~xxxxx~~ Streifen, die zu derselben Kurve gehören und die immer denselben Winkel einschliessen, der eine Krümmungsstreifen ist, auch der andere ein solcher sein muss. Diese Umkehrung können wir hier sofort anwenden. Die Tangentialebene steht bei der Rotationsfläche in jedem Punkte senkrecht auf der Meridianebene, sie bildet also mit der Meridianebene einen konstanten Winkel. Also ist ein Meridianstreifen immer ein Krümmungsstreifen.

Dieselbe Überlegung gilt auch für die Breitenchnitte. Auch sie sind ebene Schnitte, die mit der Tangentialebene einen konstanten Winkel einschliessen.

Wir wollen noch einen zweiten Beweis für diese Tatsache geben:

Wenn Meridiane und Breitenchnitte Krümmungsstreifen geben sollen, so müssen ihre Streifen Worsen sein. Das heisst aber, dass sich benachbarte Normale schneiden müssen. Für die Meridiane ist das von vorneherein klar, denn ihre Normale ~~xxxxx~~ liegen sämtlich ~~xxxxx~~ in der ~~xxxxx~~ Ebene des Meridians. Für einen Breitenkreis gehen aber sämtliche Normale durch einen Punkt, schneiden sich also auch.

Eine Ausnahme unter den Rotationsflächen bildet die Kugel. Auf ihr ist das System der Meridiane und Breitenkreise unbestimmt. Und ebenso ist es mit der Ebene. Kugel und Ebene sind also Flächen, bei denen in jedem Punkte die Krümmungsrichtungen unbestimmt sind. Sie bestehen also nur aus Nabelpunkten. Da erhebt sich sofort die Frage: Welches ist die Gesamtheit aller Flächen, die nur aus Nabelpunkten bestehen? Wir behaupten, dass nur Ebene und Kugel solche Flächen sind. Da die Ebene eine solche ist, haben wir also zum Beweise nur solche Fläche zu untersuchen, die keine Ebene sind.

Wir betrachten also eine Fläche und auf ihr eine Kurve mit der Normalen  $\xi$ . Nun schneiden wir die Fläche mit einer Ebene, die durch  $\xi$  geht. Dann ist, da die Fläche nur aus Nabelpunkten bestehen soll, jede Schnittkurve dieser Fläche mit der Ebene eine Krümmungslinie. Ihr Streifen ist also Krümmungstreifen und muss es auch noch bleiben, wenn wir die Kurve mit der Tangentialebene koppeln. Es muss also die Tangentialebene mit der Schnittebene einen konstanten Winkel einschliessen, und zwar einen rechten, denn er ist in dem zuerst betrachteten Punkte ein rechter. Sei nun  $P'$  irgendein anderer Punkt der Fläche auf der betrachteten Krümmungslinie, dann muss also auch die Normale  $\xi'$  in  $P'$  in der betrachteten Schnittebene liegen. Das heisst aber, dass sich  $\xi$  und  $\xi'$  schneiden. Nehmen wir nun einen dritten Punkt  $P''$  hinzu, mit der Normalen  $\xi''$ , dann muss also  $\xi''$  sowohl  $\xi$  als auch  $\xi'$  schneiden. Das kann sie aber nur auf eine Weise, da wir die Ebene schon aus der Betrachtung ausgeschlossen haben, es müssen alle Normalen durch einen Punkt gehen. Wir haben es also mit einer Kugel zu tun. Damit haben wir also gezeigt:

Die Gesamtheit aller Flächen, die nur aus Nabelpunkten bestehen, ist die der Kugeln und Ebenen.

Es gibt nun einen merkwürdigen Satz von DUPIN über dreifach orthogonale Systeme. Betrachten wir ein System von Flächen, so dass durch jeden Punkt des Raumes drei Flächen gehen, die so beschaffen sind, dass ihre Tangentialebenen sich senkrecht schneiden, dann sind die Schnittkurven, die eine der drei Flächenscharen auf den Flächen einer anderen Schar herauschneidet, Krümmungslinien. Wir formulieren also:

Die Flächen eines rechtwinkligen Netzes durchschneiden sich paarweise in Krümmungslinien.<sup>1)</sup>

Wir wollen diese Verhältnisse an dem Beispiel der Rotationsflächen erläutern. Da betrachten wir folgendes System von Flächen: Die Fläche selbst und ihre Parallel-

---

Ch. DUPIN: Developpements de geometrie. Paris 1813.

flächen sind das eine Flächensystem. Als zweites System wählen wir die Meridianebenen und als drittes die Kegel, die die Meridiane senkrecht durchschneiden. Diese drei Systeme schneiden sich in der Tat orthogonal. Die Schnittkurven auf den Rotationsflächen sind die Meridiane und die Breitenkreise, also in der Tat ~~Krümmungslinien~~ Krümmungslinien. Auf den Kegeln werden Breitenkreise und Erzeugende herausgeschnitten, also ebenfalls Krümmungslinien, und in der Meridianebene ist jede Linie Krümmungslinie.

Nun wollen wir die Verhältnisse allgemein untersuchen. Der Ortsvektor eines Punktes der Schnittkurve sei

$$(1) \quad \zeta = \zeta(u, v, w)$$

Wir wollen annehmen, dass die Kurven  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  und  $w = \text{const}$  die interessantesten sind. Dann drückt sich die Orthogonalität in den Formeln wie folgt aus:

$$(2) \quad \zeta_u \zeta_v = 0$$

$$(3) \quad \zeta_u \zeta_w = 0$$

$$(4) \quad \zeta_v \zeta_w = 0$$

denn eine Fläche wird durch  $w = \text{const}$ , die andere durch  $v = \text{const}$  und die dritte durch  $u = \text{const}$  gegeben.

Wir differenzieren (2) nach  $w$ , (3) nach  $u$ , (4) nach  $v$ :

$$(5) \quad \zeta_u \zeta_{uw} + \zeta_w \zeta_{uw} = 0$$

$$(6) \quad \zeta_v \zeta_{wu} + \zeta_w \zeta_{uv} = 0$$

$$(7) \quad \zeta_w \zeta_{uv} + \zeta_u \zeta_{vw} = 0$$

Addieren wir diese drei Gleichungen, so folgt

$$(8) \quad \zeta_u \zeta_{uw} + \zeta_v \zeta_{vu} + \zeta_w \zeta_{vw} = 0$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (5), so ergibt sich

$$(9) \quad \zeta_w \zeta_{uv} = 0$$

Durch Vergleich mit (6) und (7) ergibt sich dann entsprechend

$$(10) \quad \zeta_u \zeta_{vw} = 0$$

$$(11) \quad \zeta_v \zeta_{wu} = 0$$

Nehmen wir zu diesen drei Gleichungen die Gleichungen (2), (3) und (4) hinzu, so folgt aus (10), (3) und (4)

§42: Winkeltreue Abbildungen.

Wir wollen uns nun im Rahmen der bisherigen Ableitungen mit der winkeltreuen Abbildung befassen. Die einfachste unter ihnen ist die Ähnlichkeitstransformation. Dann gehört dazu die grosse Klasse der Inversionen. Die Ähnlichkeitstransformationen interessieren uns, da sie auf sehr einfachen Prinzipien beruhen, nicht so sehr wie gerade die Inversionen. Eine Inversion ist allgemein durch die Transformationsgleichungen gegeben:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \frac{\xi}{r^2} \\ y &= \frac{\eta}{r^2} \\ z &= \frac{j}{r^2} \end{aligned}$$

wobei

$$(2) \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2 + j^2$$

Diese Abbildungen sind winkeltreu und führen die Gesamtheit der Ebenen und Kugeln in sich über. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass Ebenen wieder in Ebenen und Kugeln in Kugeln übergeführt werden. In der Ebene gelten dieselben Verhältnisse für Geraden und Kreise. Das ist ein Wunderfall des räumlichen Problems, denn Geraden und Kreise sind die Schnittgebilde von Ebenen und Kugeln.

Wir wollen nun beweisen, dass die einzigen Abbildungen, welche die Winkel erhalten, diejenigen sind, welche die Menge der Ebenen und Kugeln in sich überführt, dass also, wenn ich von einer Abbildung des Raumes in sich weiss, dass sie winkeltreu ist, ich auch sofort weiss, dass sie die Gesamtheit der Kugeln und Ebenen in sich überführt.

In der Ebene gibt es zwar eine grosse Mannigfaltigkeit von winkeltreuen Abbildungen, im Raume hört diese Mannigfaltigkeit aber auf.

Wir sehen zunächst sofort, dass, wenn wir auf eine Fläche eine solche Abbildung ausüben, die Krümmungslinien erhalten bleiben müssen, denn wenn wir ein dreifaches Orthogonalsystem transformieren, so muss wegen der Winkeltreue der Abbildung wieder ein solches sich ergeben.

Wenn wir also beweisen können, dass sich jede Fläche in ein dreifaches Orthogonalsystem einbetten lässt, so

$$(12) \quad f_u f_w = 0$$

$$(13) \quad f_u f_v = 0$$

$$(14) \quad f_v f_w = 0$$

d.h.  $f_u$  steht auf  $f_v$ ,  $f_u$  und  $f_w$  senkrecht. Diese drei Vektoren müssen also in einer Ebene liegen, also linear zusammenhängen:

$$(15) \quad (f_u, f_v, f_w) = 0$$

oder nach (31;4)

$$(16) \quad M = 0$$

Wir haben es also in der Tat mit Krümmungslinien zu tun.

Dieser Satz von DUPIN erscheint zunächst sehr merkwürdig. Man kann doch offenbar ganz willkürlich zu einer Flächenschar eine andere bestimmen, die auf ihr senkrecht steht. Ihre Schnittkurven sind dann irgendein System von Kurven im Raume. Zu diesen Kurven kann man nun doch jeweils die orthogonalen Ebenen wählen. Dann bilden diese Ebenen zusammen mit den beiden Flächenscharen ein System von drei orthogonalen Flächenscharen. Und das scheint ganz willkürlich zu gehen, denn die Kurvenschar erschien ganz willkürlich gewählt. Und es soll, so heisst der DUPINsche Satz, nicht so sein.

Bei zwei Scharen von Flächen ist es zwar richtig, dass man da willkürlich Orthogonalität vorschreiben kann, ohne dass sich Krümmungslinien ergeben müssen. Wenn es sich aber um drei Flächenscharen handelt, kann man sich den DUPINschen Satz ansehen und so klar machen: Durch jeden Raumpunkt geht ein Flächenelement hindurch, das durch den Punkt eine Richtung gegeben ist. Da ist nun aber eine Unterscheidung wichtig. Solche Flächenelemente brauchen sich nicht zu Flächen zusammenzuschliessen. Wenn man in jedem Punkte ein solches Flächenelement befestigt und nach der Fläche sucht, die von diesen Flächenelementen gebildet wird, so ist das Problem im allgemeinen nicht lösbar. Es müssen dazu gewisse Bedingungen erfüllt sein. Und da sind gerade diese DUPINschen Bedingungen notwendig und hinreichend. Es muss sich, wenn wir von einem Element zu einem benachbarten übergehen, die Charakteristik als Fortschrittingsrichtung ergeben. Und das ist im allgemeinen nicht der Fall.

sind wir fertig. Dann sind die Schnittkurven die Krümmungslinien und die werden in sich übergeführt. Das beweisen wir nun so: Sei  $\xi$  der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der betrachteten Fläche,  $\xi$  der Normalenvektor der Fläche. Lassen wir den Normalenvektor längs einer Krümmungslinie entlanggleiten, dann überstreicht er eine Torse, eine abwickelbare Fläche. Machen wir das mit allen Krümmungslinien der einen Schar, so bekommen wir eine Schar von Torsen, die zweite Schar ergibt eine andere Torsenschar. Und diese beiden Torsenscharen müssen senkrecht aufeinander stehen, denn sie stehen im betrachteten Punkt senkrecht aufeinander, und da Torsen entlang ihrer Erzeugenden immer dieselbe Tangentialebene besitzen, müssen sie sich längs der ganzen Erzeugenden senkrecht durchschneiden.

Nun müssen wir noch eine dritte Schar angeben, die auf den beiden ersten senkrecht steht. Zu dieser dritten Schar muss offenbar die Fläche selbst gehören. Als diese dritte Schar wählen wir die Parallelfächen der Ausgangsfläche

$$(3) \quad \eta = \xi + n \xi$$

Wenn wir zeigen wollen, dass die Tangentialebenen dieser Schar senkrecht auf denen der beiden ersten Schar stehen, so brauchen wir nur zu zeigen, dass die Flächenschar (3) auf  $\xi$  senkrecht steht. Nun wird aber die Tangentialebene dieser Fläche aufgespannt von den beiden Vektoren  $\eta_u$  und  $\eta_v$ . Wenn ich also zeige, dass

$$(4) \quad \eta_u \xi = 0$$

und

$$(5) \quad \eta_v \xi = 0$$

gilt, so bin ich fertig. Um das zu zeigen, differenziere ich (3) nach  $u$  und multipliziere mit  $\xi$ . Dann ergibt sich

$$(6) \quad \begin{aligned} \xi \eta_u &= (\xi_u + n \xi_u) \xi \\ &= \xi \xi_u + n \xi \xi_u = 0, \end{aligned}$$

da  $\xi$  senkrecht auf  $\xi_u$  und  $\xi_u$  steht.

Differenzieren wir (3) nach  $v$  und multiplizieren mit  $\xi$ , so folgt

$$(7) \quad \begin{aligned} \xi \eta_v &= (\xi_v + n \xi_v) \xi \\ &= \xi \xi_v + n \xi \xi_v = 0 \end{aligned}$$

Also sind in der Tat die beiden Gleichungen (4) und (5) erfüllt. Man kann also jede Fläche in ein dreifaches Orthogonalsystem einbetten. Damit ist bewiesen, dass die winkeltreue Abbildung die Krümmungslinien erhält. Wenn nun aber Krümmungslinien in Krümmungslinien übergehen, so müssen auch Nabelpunkte in Nabelpunkte übergeführt werden. Insbesondere müssen also die Flächen, die nur aus Nabelpunkten bestehen, in sich übergehen. Nun haben wir aber bewiesen, dass die Gesamtheit aller Flächen, die nur aus Nabelpunkten bestehen, die Gesamtheit der Kugeln und Ebenen ist. Also geht bei der winkeltreuen Abbildung die Gesamtheit der Kugeln und Ebenen in sich über.

Aus diesem Satze kann man eine wichtige Folgerung ziehen:

Die Gesamtheit der winkeltreuen Abbildungen kann man durch Ähnlichkeitstransformationen und Inversionen erzeugen.

Diesen Satz wollen wir ~~xxxxxxx~~ aber nicht beweisen.

Der Satz, den wir damit bewiesen haben, ist als Typus interessant. Wir haben uns bei den bisherigen Betrachtungen nur um die Gestalten und nicht um Invarianzeigenschaften gekümmert.

Zum Beispiel geht die Tangente einer Kurve in die der Bildkurve über, ebenso die Tangentialebene einer Fläche. Man kann zeigen, dass ebenso die Charakteristik eines Streifens in die des Bildstreifens übergeht bei projektiver Transformation, und daraus folgt weiter, dass die konjugierten Richtungen einer Fläche bei projektiver Transformation wieder in solche übergehen, denn sie sind durch Charakteristikeigenschaften definiert. Daraus folgt auch, dass bei projektiver Transformation die Asymptoten in sich übergehen, denn sie sind sich selbst konjugiert. Das sind alles schon Eigenschaften, die konservativ sind. Die Krümmungslinien sind gegenüber der projektiven Transformation ~~xxxxxxxxxxx~~ nicht konservativ, aber sie sind es gegenüber der Gruppe, die aus Ähnlichkeits-  
transformationen und Inversionen besteht.



### 3. Kapitel: Die sphärische Abbildung.

Wir wollen uns nun etwas eingehender mit der Abbildung von Flächen beschäftigen, wenigstens soweit es mit den bisher entwickelten Mitteln möglich ist. Wir werden dann später, wenn wir die Theorie der geodätischen Linie bis zu einem gewissen Grade hinter uns haben werden, auf diese Fragen zurückkommen.

Von fundamentaler Bedeutung für die Differentialgeometrie sind die sphärischen Abbildungen. Sie werden uns später bei der Theorie der Verbiegung der Flächen weiter beschäftigen.

Bei einer sphärischen Abbildung wird eine beliebige Fläche auf eine Kugel abgebildet. Man kann nun von vorne herein sich auf die Abbildung auf die Einheitskugel beschränken, weil damit die Abbildung auf eine beliebige Kugel sofort gegeben ist. Und zwar geschieht diese Abbildung in der Weise, dass die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten der Fläche und der Einheitskugel einander parallel sind, oder in anderen Worten, dass entsprechende Punkte durch parallele Normale aufeinander bezogen sind. Und da sehen wir sofort den Vorteil, den die Abbildung speziell auf die Einheitskugel bietet: Man kann sich dann die Abbildung so vorgenommen denken, dass man die Normalenvektoren  $\xi$  der Fläche, die ja immer als Einheitsvektoren vorausgesetzt sind, von einem Punkte des Raumes aus anträgt. Dann überstreichen die Endpunkte der so abgetragenen Vektoren auf der Einheitskugel ein Flächenstück der Kugeloberfläche.

Diese Abbildung ist nicht eindeutig, denn zu einem Punkte der Fläche gehören zwei diametral gegenüberliegende Punkte der Kugel, aber sie kann sofort stetig gemacht werden, wenn man von der Abbildung eines Punktes ausgeht.

Ehe wir nun zu der sphärischen Abbildung selbst kommen, wollen wir einen allgemeineren Weg ein Stück weit verfolgen.

#### §43: Abbildung einer beliebigen Fläche auf eine konvexe Fläche.

Wir betrachten zwei Flächen  $\mathbb{F}$  und  $\mathbb{F}_0$ . Von der Fläche  $\mathbb{F}_0$  wollen wir voraussetzen, dass sie **k o n v e x** ist. (Sie wird im nächsten Paragraphen zur Einheitskugel werden). Es soll also gelten

$$(1) \quad L^0 M^0 - M^0{}^2 > 0$$

wobei die oberen Indizes bedeuten sollen, dass es sich um die Fundamentalgrößen der Fläche  $\mathbb{F}_0$  handelt.

Wir bilden nun die Fläche  $\mathbb{F}$  auf die Fläche  $\mathbb{F}_0$  ab und zwar so, dass die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten parallel sind. Die Ortsvektoren auf den beiden Flächen seien  $\rho$  und  $\rho^0$ .

Zunächst fragen wir nach dem gemeinsamen konjugierten Netz. Wir suchen ein Kurvennetz auf  $\mathbb{F}$  und  $\mathbb{F}_0$ , das auf beiden Flächen aus konjugierten Richtungen besteht und das ausserdem aufeinander abgebildet wird. Die Richtungen des Kurvennetzes müssen die Polarform der zweiten Fundamentalform annullieren. Es muss also, wenn wir die beiden Fortschreitungsrichtungen mit  $d$  und  $\delta$  bezeichnen, gelten

$$(2) \quad II'(d, \delta) = 0$$

$$(3) \quad II^{0'}(d, \delta) = 0$$

Ich behaupte nun, dass es im allgemeinen ein reelles System von Richtungspaaren gibt, das diese Eigenschaften besitzt. Das ist nur eine Verallgemeinerung des Satzes über die Krümmungslinien. Da hatten wir für die Bedingungsgleichung  $II' = 0$ ,  $I' = 0$  ein reelles Lösungspaar von Richtungen gefunden, weil  $I'$  positiv definit war. Ersetzen wir nun die Bedingungsgleichung  $I' = 0$  durch (3), so muss sich ebenfalls ein reelles Lösungspaar ergeben, wenn nur  $II^{0'}$  positiv definit ist. Und das haben wir ja gerade vorausgesetzt. <sup>1)</sup>

Unendlich viele reelle Lösungen der beiden Gleichungen (2) und (3) erhalten wir, wenn die beiden Formen  $II'$  und  $II^{0'}$  einander proportional sind. Das ist ein Ausnahmefall. Im Allgemeinen können wir nur ein reelles Lösungspaar ansetzen.

Wir wollen nun das gemeinsame konjugierte Netz, dessen Existenz ja nun gesichert ist, als Parameternetz einführen. und die Ableitungen  $\rho_u$  und  $\rho_v$  betrachten. Diese beiden Vektoren spannen die Tangentialebene der Fläche  $\mathbb{F}$  im betrachteten Punkte auf. Die ist aber parallel zu der Tangentialebene an  $\mathbb{F}^0$  im entsprechenden Punkte. Es müssen also  $\rho_u$  und  $\rho_v$  linear mit  $\rho_u^0$  und  $\rho_v^0$  zusammenhängen:

1) Einen analogen Satz gibt es auch für die erste Fundamentalform. Dort handelt es sich um orthogonale Richtungen.

$$(4) \quad f_u = \alpha f_u^0 + \alpha' f_v^0$$

$$(5) \quad f_v = \beta' f_u^0 + \beta f_v^0$$

In diesen Gleichungen steckt also die orthogonale Abbildung. Nun können wir noch anwenden, dass wir das gemeinsame konjugierte Netz als Parameternetz gewählt haben. Nach den Überlegungen in §31 folgt aus dem Verschwinden von  $II' \cdot M = 0$ . Es muss also für die beiden Flächen folgen:

$$(6) \quad \xi_v f_u = \xi_u f_v = 0$$

$$(7) \quad \xi_v f_u^0 = \xi_u f_v^0 = 0$$

Diese Formeln wollen wir uns merken.

Wir multiplizieren (4) mit  $\xi_v$  und (5) mit  $\xi_u$ :

$$(8) \quad \xi_v f_u = \alpha f_u^0 \xi_v + \alpha' \xi_v f_v^0$$

$$(9) \quad \xi_u f_v = \beta' f_u^0 \xi_u + \beta \xi_u f_v^0$$

oder wegen (6) und (7)

$$(10) \quad 0 = \alpha' \xi_v f_v^0$$

$$(11) \quad 0 = \beta' \xi_u f_u^0$$

d.h.

$$(12) \quad \alpha' = \beta' = 0$$

und (4) und (5) gehen über in

$$(13) \quad f_u = \alpha f_u^0$$

$$(14) \quad f_v = \beta f_v^0$$

Es ist also der Vektor  $f_u$  parallel zu  $f_u^0$  und  $f_v$  parallel zu  $f_v^0$ . Es sind also die Flächennicht nur durch parallele Tangentialebenen aufeinander abgebildet, die konjugierten, sich entsprechenden Richtungspaare in den beiden Flächen sind zueinander parallel.

Umgekehrt behaupten wir nun den Satz:

Gegeben sei eine Fläche  $\mathbb{F}^0$ , die konvex ist, und eine Fläch-

che  $\mathbb{I}$ , die mit ihr in der angegebenen Beziehung steht. Dann sind die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten parallel, und die entsprechenden Parameternetze  $u, v$  und  $u_0, v_0$  sind konjugierte Netze.

Die erste Behauptung ist trivial, denn die Tangentialebenen werden durch  $f_u, f_v$  einerseits und durch  $f_u^0, f_v^0$  andererseits aufgespannt, und die Vektoren sind nach (13) und (14) parallel. Nicht trivial ist dagegen die zweite Behauptung. Wir beweisen sie auf folgende Weise: Wir differenzieren (13) und (14) nach  $v$  bzw.  $u$  und subtrahieren:

$$f_{uv} - f_{vu} = (\alpha f_u^0)_v - (\beta f_v^0)_u$$

oder

$$0 = (\alpha f_u^0)_v - (\beta f_v^0)_u$$

oder

$$(15) \quad 0 = (\alpha - \beta) f_{uv} + \alpha_v f_u^0 - \beta_u f_v^0$$

d.h. die Vektoren  $f_{uv}^0$ ,  $f_u^0$  und  $f_v^0$  sind linear abhängig, also

$$(f_u^0, f_v^0, f_{uv}^0) = 0$$

d.h.

$$(16) \quad M = 0$$

Es könnte nun aber sein, dass

$$(17) \quad \alpha - \beta = \alpha_v = \beta_u = 0$$

ist, dann ist die Gleichung (15) identisch erfüllt und die Gleichung (16) kann nicht aus ihr gefolgert werden. Ueber diesen Sonderfall haben wir uns zu informieren. (17) besagt

$$(18) \quad \alpha = \beta = \text{const}$$

also

$$(19) \quad \begin{aligned} f_u &= \text{const} \cdot f_u^0 \\ f_v &= \text{const} \cdot f_v^0 \end{aligned}$$

Die Flächen sind also einander ähnlich, und dann ist in der Tat nicht mehr die Rede davon, dass  $u, v$  ein konjugiertes Netz bilden.

Und eine andere Bemerkung wollen wir hier noch einfügen. Es gibt ausser den genannten noch mehrere Flächen, welche die richtige Relation erfüllen. Betrachten wir nämlich die Fläche

$$(20) \quad \mathcal{J} = l\mathcal{J} + m\mathcal{J}^0$$

wobei  $l$  und  $m$  Konstante sind, dann gilt

$$(21) \quad \mathcal{J}_u = l\mathcal{J}_u + m\mathcal{J}_u^0 = (l\alpha + m)\mathcal{J}_u^0$$

und

$$(22) \quad \mathcal{J}_v = (l/\alpha + m)\mathcal{J}_v^0$$

Es sind das also in der Tat Flächen, die in der richtigen Relation zueinander stehen. Es sind aber nicht sämtlich eigentliche Flächen. An gewissen Stellen sind Singularitäten vorhanden. Es ist

$$\mathcal{J}_u = \alpha\mathcal{J}_u^0$$

Quadrieren wir, so folgt

$$(23) \quad E = \alpha^2 E^0$$

Es muss also  $\alpha \neq 0$  und entsprechend auch  $\beta \neq 0$  sein, da weder  $E$  und  $E^0$ , noch  $L$  und  $L^0$  verschwinden können. Es muss also auch

$$(24) \quad l\alpha + m \neq 0$$

sein. Um etwas Neues zu bekommen, werden wir also nur die einparametrische Flächenschar

$$(25) \quad \mathcal{J} = \mathcal{J} + n\mathcal{J}^0$$

untersuchen, wobei

$$(26) \quad n = \frac{m}{l}$$

ist. Diese Flächen sind in der Tat nicht ähnlich. Aber auch bei diesen Flächen kommen noch Singularitäten vor, nämlich dann, wenn wir  $n$  so bestimmen, dass die Ungleichung (24) nicht erfüllt ist.

§44: Die Abbildung einer Fläche auf die Einheitskugel.

Die bisher entwickelte Theorie ist in vollem Umfange auf die Abbildung einer Fläche auf die Einheitskugel anwendbar. Da haben wir also  $\mathbb{U}^0$  als Einheitskugel zu wählen. Das können wir, weil die Kugel eine konvexe Fläche ist. Auch da ist die Existenz der Scharen  $u^0, v^0$  gesichert, deren parallele Scharen  $u^0, v^0$  auf der Kugel konjugiert sein müssen. Ich behaupte nun, dass diese Scharen  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  Krümmungslinien sind. Das ist leicht zu beweisen: Auf der Kugel sind die Scharen  $u^0 = \text{const}$  und  $v^0 = \text{const}$  orthogonal zueinander, denn auf der Kugel ist orthogonal und konjugiert dasselbe. Betrachten wir nämlich auf der Kugel zwei Punkte und ihre Tangentialebenen, so schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden, die windschief zu den Verbindungsgeraden der beiden Punkte der Kugel ist. Diese Schnittgerade geht in der Grenze, wenn die beiden Punkte zusammenrücken, in die Charakteristik über, andererseits bleibt sie aber senkrecht zur Fortschreitungsrichtung. Also ist auf der Kugel in der Tat orthogonal und konjugiert gleichwertig. Es wird also unser konjugiertes Netz zunächst auf der Kugel ein Netz von orthogonalen Richtungen. Nun sind aber die Kurven des Netzes auf der Originalfläche parallel zu denen auf der Kugel, also wird das Netz auf der Fläche aus solchen Kurven bestehen, die gleichzeitig konjugiert und orthogonal sind. Und das sind die Krümmungslinien. Da behaupten wir nun, dass die Formeln

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi_u &= \alpha \xi_v^0 \\ \xi_v &= \beta \xi_u^0 \end{aligned}$$

in die Formeln von RODRIGUES übergehen. Aus der Tatsache, dass wir es mit Krümmungstreifen zu tun haben, folgt sofort nach den Überlegungen in §22

$$(2) \quad \xi_u + \rho \xi_v = 0$$

$$(3) \quad \xi_v + \sigma \xi_u = 0$$

Unsere Behauptung lautet

$$(4) \quad \rho = R_1$$

$$(5) \quad \sigma = R_2$$

Zum Beweise multiplizieren wir (2) mit  $\xi_u$ :

$$\xi_u^2 + \rho \xi_u \xi_v = 0$$

oder

$$(6) \quad E + \rho(-L) = 0$$

Daraus folgt

$$(7) \quad \frac{\rho}{E} = -\frac{L}{E}$$

Wir haben nun früher abgeleitet

$$\frac{1}{R} = -\frac{II}{I}$$

Betrachten wir nun die Linien  $v = \text{const}$ , dann wird  $dv = 0$ , und wir erhalten

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L du^2}{E du^2} = \frac{L}{E}$$

sodass aus (7) folgt

$$(4) \quad \rho = R_1$$

Ganz entsprechend findet man

$$(5) \quad \sigma = R_2$$

Dann wird aus (2) und (3)

$$(8) \quad \xi_u + R_1 \xi_v = 0$$

$$(9) \quad \xi_v + R_2 \xi_u = 0$$

Wir haben schon gesagt, dass mit den Flächen  $\gamma(u, v)$  auch die Parallelfächen

$$(10) \quad \beta(u, v) = \gamma(u, v) = n \xi(u, v)$$

zur Betrachtung zugelassen werden müssen. Wir behaupten nun, dass sie dasselbe sphärische Bild besetzen. Das ist anschaulich sofort klar, denn entsprechenden Punkten der einzelnen Flächen entsprechen ja dieselben Normalen. Aber auch rechnerisch folgt es sofort. Aus (10) folgt

$$(11) \quad \beta_u = \gamma_u + n \xi_u$$

und aus (8)

$$(12) \quad \beta_u = -R_1 \xi_u$$

Dann geht (11) über in

$$j_u = (n - R_1) \xi_u$$

oder

$$(13) \quad j_u + (R_1 - n) \xi_u = 0$$

und ganz entsprechend folgt

$$(14) \quad j_v + (R_2 - n) \xi_v = 0$$

Es sind also die beiden Vektoren  $j_u$  und  $j_v$  proportional den Vektoren  $\xi_u$  und  $\xi_v$ . Es sind also die Tangentialebenen parallel. Daraus folgt, dass die Krümmungslinien auf der Fläche  $\gamma$  parallel denen auf der Fläche  $\beta$  sind, nur dass  $R_1$  bzw.  $R_2$  durch  $(R_1 - n)$  bzw.  $(R_2 - n)$  ersetzt werden. Das sphärische Bild beider Flächen  $n$  ist dasselbe. Wir werden für diesen Sachverhalt später einen sehr durchsichtigen geometrischen Grund angeben.

Es liegt nun nahe, das Verhältnis der beiden Hauptkrümmungsradien auf den Flächen zu untersuchen, etwa  $\frac{R_2}{R_1}$ . Gehen wir zur Parallelfäche über, so haben wir das Verhältnis  $\frac{R_2 - n}{R_1 - n}$  zu betrachten. Denken wir uns insbesondere eine konvexe Fläche, bei der also  $R_1$  und  $R_2$  dasselbe Vorzeichen haben, wobei etwa

$$(15) \quad R_2 \geq R_1 > 0$$

sei, dann sehen wir folgendes: Sind  $R_1$  und  $R_2$  überhaupt gleich, so haben wir es mit einer Fläche zu tun, die nur aus Nabelpunkten besteht. Da wird also auch die Parallelfäche nur aus Nabelpunkten bestehen.

Ist aber

$$(16) \quad R_2 > R_1 > 0,$$

und lassen wir  $n$  etwa wachsen, dann wird  $n$  einmal so groß werden, wie der kleinste der beiden Krümmungsradien. Dabei geht der Quotient gegen  $\infty$ . Dann wird, wenn  $n$  weiter wächst, einmal  $R_2$  erreicht sein, und der Quotient hat den Wert Null, dann aber wächst der Quotient wieder und konvergiert gegen 1.

Wir wollen nun noch einige weitere Eigenschaften des sphärischen Bildes untersuchen. Es liegt nahe, das Bogenelement, das bei einer gewissen sphärischen Abbildung auf der Kugel auftritt, zu betrachten.



Bis jetzt haben wir nur die Differentialformen

$$d\gamma' = I$$

und

$$-d\gamma d\xi = II$$

Betrachtet man führt nun gelegentlich eine dritte Form ein:

$$(17) \quad d\xi^2 = III$$

nämlich das Bogenelement auf der Einheitskugel. Es hat in diesem Zusammenhange Sinn, davon zu sprechen, weil ja dieses Bogenelement immer auf eine bestimmte sphärische Abbildung bezogen ist. Man setzt

$$(18) \quad III = d\xi^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

Dabei ist also

$$(19) \quad e = \xi_u^2$$

$$(20) \quad f = \xi_u \xi_v$$

$$(21) \quad g = \xi_v^2$$

Damit haben wir ein neues Grössentripel gewonnen. Zwischen den beiden Formen I und II und dieser neuen Form bestehen nun einige Beziehungen:

1.) Wir wollen die Oberfläche der Einheitskugel  $\Omega_A$  nennen. Dann wird offenbar

$$(22) \quad \Omega_A = \iint \sqrt{eg - f^2} \, du \, dv$$

Wie bei jeder Fläche, so ist auch bei der Einheitskugel dieses Oberflächenintegral unabhängig von der speziellen Wahl des Parameternetzes. Auf unserer Fläche ist entsprechend

$$(23) \quad \Omega = \iint \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

Diese beiden Oberflächen (22) und (23) wollen wir miteinander vergleichen. Da sie unabhängig von der Wahl der Parameter sind, können wir das bequemste Parameternetz nehmen, nämlich die Krümmungslinien. Wir wählen also  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  als Krümmungsrichtungen.

Aus

$$(8) \quad \xi_u + R_1 \xi_v = 0$$

und

$$(9) \quad \xi_v + R_2 \xi_u = 0$$

folgt

$$\xi_u^2 = R_1^2 \xi_v^2$$

und

$$\xi_v^2 = R_2^2 \xi_u^2$$

oder

$$(24) \quad E = R_1^2 e$$

und

$$(25) \quad G = R_2^2 g$$

Dadurch, dass wir die Krümmungslinien als Parameterlinien gewählt haben, wird

$$(26) \quad F = f = 0$$

Dann wird also

$$(27) \quad W = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{EG}$$

und

$$(28) \quad w = \sqrt{eg - f^2} = \sqrt{eg}$$

Setzen wir (24) und (25) in (28) ein, so folgt

$$(29) \quad w = \sqrt{\frac{E \cdot G}{R_1^2 R_2^2}} = \frac{1}{|R_1 R_2|} W = |K| W,$$

wobei  $K$  die Gaussische Krümmung ist. Dann folgt aus

(22)

$$(30) \quad \Omega_K = \iint w \, du \, dv = \iint |K| W \, du \, dv$$

Wir wissen nun, dass die Gaussische Krümmung auf der Fläche einen gewissen kleinsten und einen grössten Wert annimmt. Wir können also eine mittlere Gaussische Krümmung für die betrachtete Fläche annehmen, so dass wird

$$\Omega_K = |K_m| \iint W \, du \, dv = |K_m| \Omega$$

also

$$(31) \quad \frac{\Omega_K}{\Omega} = |K_m|$$

Denken wir das betrachtete Flächenstück immer kleiner werdend, so erhalten wir in der Grenze

$$(32) \quad \lim_{\Omega \rightarrow \sigma} \frac{\Omega_u}{\Omega} = |K|$$

Diese Gleichung gibt eine interessante Deutung für die Gaussische Krümmung:

Der Betrag der Gaussischen Krümmung ist gleich dem Flächenvergrößerungsverhältnis bei der sphärischen Abbildung.

Es wäre noch zu überlegen, was sich im Grenzfall  $K = 0$  ergibt. Dann muss das Verhältnis auch verschwinden. Das erscheint uns als sinnlos, ist es aber nicht. Wir haben es für  $K = 0$  ja mit einer Torse zu tun, also mit einer abwickelbaren Fläche, und deren Abbildung auf die Einheitskugel ist keine eigentliche Fläche mehr, sondern eine Kurve auf der Einheitskugel. Es schrumpft also dann das sphärische Bild auf eine doppelt durchlaufene Kurve zusammen, also wird in der Tat der Flächeninhalt Null.

Wir haben nun aber nur mit dem Betrage der Gaussischen Krümmung gearbeitet, haben also konvexe Flächen und Sattelflächen gar nicht unterschieden. Das ist zunächst etwas unbefriedigend. Aber es ist bei Überlegungen über den Flächeninhalt immer so, dass man das Vorzeichen einer Determinante unterschlägt. Wir wollen nun aber doch untersuchen, wie das Vorzeichen der Gaussischen Krümmung in die sphärische Abbildung hineinspielt. Zu dem Ende sehen wir uns die Formeln (8) und (9) an. Aus ihnen folgt

$$(33) \quad \xi_u = -\frac{1}{R_1} \delta u$$

$$(34) \quad \xi_v = -\frac{1}{R_2} \delta v$$

Falls die Gaussische Krümmung positiv ist, müssen  $R_1$  und  $R_2$  dasselbe Vorzeichen haben. Das besagt aber, dass bei der Abbildung der Umlaufsinn erhalten bleibt. Ist  $K$  negativ, haben also  $R_1$  und  $R_2$  entgegengesetztes Vorzeichen, so bekommen, wenn  $\delta u$  und  $\delta v$  dasselbe Vorzeichen haben,  $\xi_u$  und  $\xi_v$  verschiedenes Vorzeichen. Wir sehen also:

Bei positiver Gaussischer Krümmung bleibt der Umlaufsinn der Fläche bei der sphärischen Abbildung erhalten; bei negativer Krümmung wird der Umlaufsinn vertauscht.

Wir wollen uns etwa an dem Beispiel einer Sattelfläche klarmachen, dass bei negativer Gaussischer Krümmung - und die ist im Sattelpunkte ja vorhanden - der Umlaufsinn bei der sphärischen Abbildung umgekehrt wird. Betrachten wir den Punkt A. In ihm zeigt

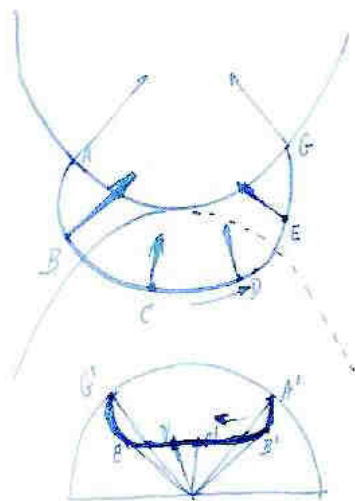


Fig. 9.

die Normale parallel zur Zeichenebene nach rechts oben. Es muss also das sphärische Bild des Punktes A rechts oben auf der Einheitskugel liegen. Im Punkte C zeigt die Normale aus der Zeichenebene nach vorn heraus und zwar nach rechts oben. Es muss also C' auf der Kugel vorn rechts liegen, usw. Man erkennt also sofort, dass in der Tat der Umlaufsinn der Kurve umgedreht wird.

2.) Einen zweiten Zusammenhang zwischen den Grössen der drei Fundamentalformen wollen wir nur andeutungsweise angeben, weil wir später noch darauf zurückkommen werden. Wir gehen von einer körperlichen Ecke mit vier Kanten aus. Aus solchen Ecken, wenn sie hinreichend klein gewählt werden, kann man jede Fläche aufbauen. Die Massbestimmungen einer solchen Ecke sind durch ihre Seiten bestimmt. Die Winkel spielen eine untergeordnete Rolle. Auch darauf werden wir später noch eingehen<sup>1)</sup>.

1) Es handelt sich um das theoreme egregium von Gauss, in welchem der Nachweis geführt wird, dass die Gaussische Krümmung

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

nur von der ersten Fundamentalform abhängt und nur scheinbar von der zweiten Fundamentalform.

Zwei Ecken werden also aufeinander abwickelbar sein, wenn die Seiten gleich sind. Die Winkel können dabei ganz verschieden aussehen. Was ist nun das sphärische Bild einer solchen Ecke? Das sind vier Punkte auf der Einheitskugel, welche den Loten auf die Seiten der Ecke entsprechen. Verbinden wir nun diese vier Punkte durch Kreisbögen, so erhalten wir ein konvexes



Fig. 10

Polygon. Wählen wir die Ecken hinreichend klein, und bauen wir die Fläche aus ihnen auf, so werden die Polygone immer kleiner und in der Grenze bedecken sie kontinuierlich die Einheitskugel zu einem Teil. Da erhalten wir in der Grenze also genau das sphärische Bild der Fläche. Wir wissen nun aus der sphärischen Trigonometrie, dass der Inhalt eines Kugelvierecks sich aus den Winkeln allein bestimmen lässt. Wählen wir nun die Ecke so, dass wir das Lot von A genau von oben sehen, dann entspricht der Winkel bei A genau dem bei A'. Es wird also auch der Inhalt des sphärischen Bildes nur von den Seiten der Ecke abhängen, denn der Winkel bei A ist gleich dem Supplement der entsprechenden Seite. Rechnen wir nun eine Ecke mit viel mehr Seiten, dann wird auch dann dieser Tatbestand immer noch vorhanden sein. Es wird sich der Flächeninhalt des sphärischen Bildes durch die Seiten der Ecke, d. h. durch die Winkel bei A, B, C, ... ausdrücken. Das führt auf die Umformung eines Flächenintegrals in ein Linienintegral, also zu einem Analogon zum Stokes'schen Satz, nämlich zu den Formeln von BONNET, auf die wir später noch eingehen werden.

3.) Um eine Relation zwischen den genannten Größen zu finden, gehen wir aus von dem Ausdruck

$$(35) \quad (d\xi + \frac{1}{R_1} d\varphi) (d\xi + \frac{1}{R_2} d\varphi)$$

wobei  $d$  und  $\delta$  zwei Fortschreitungsrichtungen sind. Multiplizieren wir aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (36) \quad d\xi \delta\xi + \frac{1}{R_1} d\zeta \delta\xi + \frac{1}{R_2} d\xi \delta\zeta + \frac{1}{R_1 R_2} d\zeta \delta\zeta \\
 = III' + \frac{1}{R_1} II' + \frac{1}{R_2} II' + \frac{1}{R_1 R_2} I' \\
 = III' + 2H II' + K I'
 \end{aligned}$$

Wir behaupten nun, dass dieser ganze Ausdruck verschwindet. Das wollen wir nachweisen. Es ist

$$(37) \quad d\xi + \frac{1}{R_1} d\zeta = (\xi_u + \frac{1}{R_1} \zeta_u) du + (\xi_v + \frac{1}{R_1} \zeta_v) dv$$

nach (8) verschwindet der erste Term auf der rechten Seite. Der zweite würde verschwinden, wenn statt  $R_1$  dort  $R_2$  stehen würde. So ist jedenfalls

$$(38) \quad d\xi + \frac{1}{R_1} d\zeta = (\xi_v + \frac{1}{R_1} \zeta_v) dv$$

Wir subtrahieren auf beiden Seiten den Ausdruck  $(\xi_v + \frac{1}{R_2} \zeta_v) dv$ . Da er nach (9) verschwindet, ändert sich gar nichts, wir können also die linke Seite von (38) unverändert lassen und die rechte umschreiben:

$$(39) \quad d\xi + \frac{1}{R_1} d\zeta = \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \zeta_v dv$$

entsprechend erhalten wir

$$(40) \quad \delta\xi + \frac{1}{R_1} \delta\zeta = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \zeta_u \delta u$$

Multiplizieren wir (39) und (40) miteinander, so sehen wir, dass in der Tat das Produkt verschwindet. Wir erhalten also

$$(41) \quad III' + 2H II' + K I' = 0$$

Wenn nun diese Gleichung für die Polarformen gilt, so muss sie auch für die Fundamentalformen richtig sein:

$$(42) \quad III + 2H II + K I = 0$$

Setzen wir die Fundamentalgrößen selbst ein, so erhalten wir also

$$(43) \quad e - 2HL + KE = 0$$

$$(44) \quad f - 2HM + KF = 0$$

$$(45) \quad g - 2HN + KG = 0$$

Das sind also allgemein gültige Relationen zwischen den Fundamentalgrößen.

Die Gleichung (41) wird besonders dann interessant, wenn das mittlere Glied verschwindet. Dann ist

$$\text{III}' \text{ proportional I}'$$

Das mittlere Glied kann nun auf zwei Weisen verschwinden, entweder dadurch, dass  $H$ , also die mittlere Krümmung, verschwindet. Dieser Fall wird uns noch einmal später wenn wir auf die Minimalflächen eingehen, beschäftigen. Ferner kann nun das mittlere Glied aber auch verschwinden, wenn wir in den Richtungen vorwärtsschreiten, in denen  $\text{II}' = 0$  ist, also in den Asymptotenrichtungen. Dann wird also nach (42)

$$(46) \quad \text{III} = -K \text{ I}$$

es seien nun  $u=\text{const}$  und  $v=\text{const}$  Asymptotenlinien. Dann wird ~~zur~~ ~~min~~

$$(47) \quad L = M = 0$$

und

$$(48) \quad \xi_u^2 = -K \zeta_u^2$$

Es muss also  $K$  negativ sein, und das ist bei den Asymptotenlinien ja auch erfüllt. Es wird also

$$(49) \quad \frac{|\xi_u|}{|\zeta_u|} = \sqrt{-K}$$

Diese Gleichung haben wir zu deuten. Wir gehen etwa in der Richtung  $v=\text{const}$  vorwärts und betrachten das durchlaufene Kurvenstück, und seine sphärische Abbildung.  $\xi_u$  gibt die Änderung auf der Einheitskugel und  $\zeta_u$  die auf der Fläche an. Wir können also setzen

$$(50) \quad \frac{|\xi_u|}{|\zeta_u|} = \frac{d\sigma}{ds}$$

wobei  $d\sigma$  das Bogenelement auf der Kugel und  $ds$  das auf der Fläche ist. Wir sehen also:

Die Quadratwurzel aus der negativen Gaussischen Krümmung gibt das Verhältnis des Asymptotenbogens zu seinem sphärischen Bilde an.

Diesen Satz können wir noch schöner formulieren. Die Asymptotenrichtungen sind ja dadurch ausgezeichnet, dass auf ihnen die Flächennormale die Binormale der Asymptotenlinie ist. Wir können also, ohne zu berücksichtigen, dass die Asymptote auf der Fläche liegt, sagen:

Die Quadratwurzel aus dem Negativen der Gaussischen Krümmung ist gleich dem Verhältnis der Linienelemente der Asymptote und ihres Binormalenbildes. (Satz von ENNEPER).

Für die Asymptotenrichtungen besteht nun die Relation  $\xi_u \zeta_u = 0$ , d.h.  $\xi_u$  und  $\zeta_u$  stehen senkrecht aufeinander. Es dreht also das sphärische Bild die Asymptotenrichtungen um den Winkel  $\frac{\pi}{2}$ . Ausserdem verzerrt es die Länge nach Massgabe der Gaussischen Krümmung. Da zeigt die nähere Betrachtung etwas Interessantes: Auf Grund der Tatsache, dass bei negativer Gaussischer Krümmung der Umlaufsinn bei der sphärischen Abbildung umgedreht wird, muss die eine Asymptotenrichtung links herum, die andere rechts herum gedreht werden. Das steht damit im Zusammenhange, dass die Torsion auf den beiden Asymptoten entgegengesetzt gleich ist. Das ist aber cum grano salis zu verstehen, denn bei geradlinigen Flächen stimmt es nicht mehr. Es sind ja auch die geraden Linien Asymptoten, aber sie besitzen keine eindeutig bestimmte Binormalenrichtung. Da kann man sich nun so helfen: Man geht auf der Geraden ein Stück weiter. Dann dreht sich die Flächennormale um den Winkel  $d\sigma$ . Und der Quotient  $\frac{d\sigma}{ds}$  ist es ja, der uns interessiert.

Dasit habe ich alles gesagt, was ich über die Gestaltlehre der Flächen glaubte sagen zu müssen. Wir wollen nun von der Gestaltlehre zu der Theorie der geraden Linien übergehen, die von mehreren Parametern abhängen. Man nennt sie Linienkongruenzen.



ABSCHNITT III: LINIENKONGRUENZEN.§45: Analytische Fassung.

Im Raum gibt es  $\infty^4$  Gerade. Betrachtet man nur  $\infty^3$  Gerade, so spricht man von einem Geradenkomplex, betrachtet man  $\infty^2$  Gerade, von einer Geradenkongruenz, und  $\infty^1$  Gerade bilden eine Regelfläche. Wir wollen uns nun mit den Linienkongruenzen beschäftigen. Da werden wir sehen, dass zwischen den Flächen, die im letzten Abschnitt behandelt wurden, und diesen Linienkongruenzen Analogien bestehen. Die formale Betrachtung führt auch hier wieder zu quadratischen Formen.

Wir wollen zunächst einige heuristische Betrachtungen anstellen.

Es ist z. B. die Gesamtheit der Lote auf eine Fläche eine Linienkongruenz, denn da haben wir es in der Tat mit  $\infty^2$  Geraden zu tun. An diesen Loten können wir schon verschiedene Eigenschaften studieren. Wir wissen, dass die Krümmungsrichtungen dadurch ausgezeichnet sind, dass die Lote, die wir in ihnen auf der Fläche errichten, sich schneiden. Betrachten wir die Lote auf anderen als Krümmungsrichtungen, so gehen sie im allgemeinen windschief aneinander vorbei. Da sind wir schon bei einem der Probleme der Linienkongruenzen angelangt. Daran schließt sich sofort folgendes Problem: Gegeben seien  $\infty^2$  Geraden. Zu untersuchen ist, wann es möglich ist, diese  $\infty^2$  Geraden als Lote auf einer Fläche zu deuten. Wir werden schon vermuten, dass das nicht immer gehen wird, hatten wir doch schon ähnliche Verhältnisse bei der Betrachtung des DUPIN'schen dreifachen Orthogonalsystemes.

Wie wollen wir nun eine Linienkongruenz analytisch beschreiben?  $\infty^2$  Geraden werden durch jeden Punkt des Raumes eine Gerade schicken. Es wird also jede Fläche  $\mathcal{F}(u, v)$  in jedem ihrer Punkte eine Gerade der Kongruenz abfangen. Man kann also die Kongruenz dadurch beschreiben, dass man von einer Fläche  $\mathcal{F}(u, v)$  ausgeht und jedem ihrer Punkte einen Vektor  $\gamma(u, v)$  anheftet. Es müssen also zwei Vektorensysteme zur Beschreibung der Kongruenz herangezogen werden, einmal der Ortsvektor des Flächenpunktes und ferner der Vektor  $\gamma(u, v)$ . Es genügt nun offenbar, eine jede Gerade der Kongruenz durch den Punkt der Fläche, durch den sie hindurchgeht,

und ihre Richtung zu bestimmen. Wir können daher

$$(1) \quad q^2 = 1$$

setzen. Diese analytische Fassung der Kongruenz lässt nun sofort neben der Fläche  $\mathcal{F}$  auch gleich die Flächen  $\mathcal{F}(u,v) + \lambda(u,v)$  zu, denn diese beiden Flächen werden von einer Gerade unter denselben Winkeln geschnitten. Es ist also die Fläche an und für sich nicht wesentlich, es ist nur eine Hilfsfläche, eine Art Koordinatensystem. Man kann sie in gewissen Grenzen variieren.

Weitere interessante Probleme sind nun, zu untersuchen, wie sich der Drall oder der Kehlpunktsabstand von einer Führungskurve ändert, wenn wir die Fortschreitungsrichtung ändern. Es sei  $l$  der Abstand des Kehlpunktes einer Regelfläche von der Führungskurve. Da haben wir schon die Formel gefunden

$$(2) \quad l = - \frac{\xi \eta'}{\eta^2}$$

und für den Drall haben wir gefunden

$$(3) \quad \frac{1}{r} = \frac{(\eta, \xi, \eta')}{\eta^2}$$

Führen wir die Parameter  $u$  und  $v$  ein, so gehen diese beiden Gleichungen über in

$$(4) \quad l = - \frac{(\xi_u du + \xi_v dv)(\eta_u du + \eta_v dv)}{(\eta_u du + \eta_v dv)^2}$$

$$(5) \quad \frac{1}{r} = \frac{(\eta, \xi_u du + \xi_v dv, \eta_u du + \eta_v dv)}{(\eta_u du + \eta_v dv)^2}$$

Wenn man ausmultipliziert, so kann man wieder drei Fundamentalformen einführen, die wir wieder mit I, II und III bezeichnen wollen. Man setzt

$$(6) \quad d\xi d\xi = I$$

$$(7) \quad d\xi^2 = II$$

$$(8) \quad \xi d\xi d\xi = III$$

Die Form I kennen wir schon, sie stimmt mit der alten Form III überein, hat also wieder die Fundamentalgrößen  $e, f$  und  $g$ . Die Form II hat vier Komponenten, weil die gemischten Glieder sich verschieden verhalten. Wir wollen ihr die Größen  $E, F, F'$  und  $G$  zuordnen.

Der dritten Form, für die das selbe gilt, ordnen wir die Größen  $L, M, M'$  und  $N$  zu. Und zwar ist

$$(9) \quad E = f_u \xi_u$$

$$(10) \quad F = f_u \xi_v$$

$$(11) \quad F' = f_v \xi_u$$

$$(12) \quad G = f_v \xi_v$$

und entsprechend

$$(13) \quad L = \xi f_u \xi_v$$

$$(14) \quad M = \xi f_u \xi_u$$

$$(15) \quad M' = \xi f_v \xi_u$$

$$(16) \quad N = \xi f_v \xi_v$$

Es wird also

$$(17) \quad II = E du^2 + (F+F') du dv + G dv^2$$

$$(18) \quad III = L du^2 + (M+M') du dv + N dv^2$$

Dann folgt aus (4) und (5)

$$(19) \quad 1 = -\frac{II}{I}$$

und

$$(20) \quad \frac{1}{\delta} = \frac{III}{I}$$

Diesen Formeln wollen wir möglichst viel entnehmen. Wir sehen sofort, dass das Verschwinden von (19) nicht von besonderem Interesse ist, weil es besagt, dass der Kehlpunkt auf der Führungskurve liegt, und die Führungskurve ist ja eine beliebige Kurve. Von Interesse ist dagegen, wie weit der Kehlpunkt hin und herlaufen kann. Ebenso wird uns die Frage nach den Extremwerten des Dralles und seinen Nullstellen interessieren.

#### §46: Brennflächen.

Wenn wir voraussetzen, dass die Form III indefinit ist, dann gibt es in jedem Punkte zwei Richtungen, in denen der Drall verschwindet. Das ergibt ~~in~~ ein Richtungsfeld, dessen Integration zu zwei Kurvenscharen  $u, v$  führt, die wir als Parameternetz wählen.

Wir interessieren uns für den Kehlpunkt. Fassen wir die Richtungen  $u=\text{const}$  und  $v=\text{const}$  ins Auge, so sind das, weil auf ihnen der Drall verschwindet, Torsen. Für sie gilt

$$(1) \quad (\eta, \zeta_u, \eta_u) = 0$$

resp.

$$(2) \quad (\eta, \zeta_v, \eta_v) = 0$$

Diese Gleichungen wollen wir ausschreiben. Dabei wird der Faktor von  $\zeta_u$  bzw.  $\zeta_v$  nicht verschwinden können, da die Gleichungen sonst aussagen würden, dass  $\eta$  und  $\eta_u$  bzw.

$\eta$  und  $\eta_v$  linear abhängig wären. Das ist aber, da sie senkrecht stehen, nicht der Fall. Wir können die Gleichungen (1) und (2) daher nach  $\zeta_u$  bzw.  $\zeta_v$  auflösen und bekommen

$$(3) \quad \zeta_u = \alpha \eta + \beta \eta_u$$

resp.

$$(4) \quad \zeta_v = \alpha' \eta + \beta' \eta_v$$

Multiplizieren wir (3) mit  $\eta_u$ , so folgt

$$\eta_u \zeta_u = \beta \eta_u^2$$

also

$$(5) \quad \beta = \frac{\eta_u \zeta_u}{\eta_u^2}$$

Andererseits hatten wir für den Kehlpunktsabstand gefunden

$$l = -\frac{\eta_u \zeta_u}{\eta_u^2}$$

so dass nun folgt

$$(6) \quad \beta = -l$$

Betrachten wir nun die Gesamtheit aller der Kehlpunkte auf den Geraden der Kongruenz, so sehen wir, dass wir da eine zweiparametrische Mannigfaltigkeit von Kehlpunkten erhalten. Die Kehlpunkte liegen also auf einer Fläche

$$(7) \quad \zeta(u, v) = \zeta + l\eta = \zeta - \beta\eta$$

Wir wollen nun im Anschluss an diese Überlegungen drei Sätze beweisen:

1. Die Fläche  $\zeta(u, v)$  wird von allen Strahlen der Kongruenz berührt.

Beweis: Zu beweisen ist, dass der Strahl die Fläche  $\zeta(u, v) = \zeta + l\eta = \zeta - \beta\eta$  berührt. Zu dem Zwecke differenzieren wir (7) nach  $u$  ( $v$  ist ja für jeden Kehlpunkt festzuhalten):

$$(8) \quad \zeta_u = \zeta_u - \beta \eta_u + \beta_u \eta$$

oder nach (3)

$$(9) \quad j_u = \alpha \eta + \beta \eta_u - \beta' \eta_u + \beta_u \eta = (\alpha + \beta_u) \eta$$

Wir sehen also, dass die Tangente an die Fläche  $\mathcal{F}(u,v)$  in jedem Punkte die Richtung eines der Strahlen  $v=\text{const}$  hat. Es liegt also in der Tat jeder Punkt der Fläche auf einem Systemstrahl, und die Fläche wird in ihm von dem Strahl tangiert.

Dieselben Überlegungen kann man natürlich auch mit den Kurven  $u=\text{const}$  anstellen. Dann findet man, dass auch der Strahl  $\mathcal{F} - \beta' \eta$  die Fläche tangiert. Dabei wird im allgemeinen  $\beta \neq \beta'$  sein. Darauf kommen wir noch zurück.

2. Das Netz  $u = \text{const}, v = \text{const}$  ist ein konjugiertes Netz auf der Fläche  $\mathcal{F}(u,v)$ .

Beweis: Wir haben zu zeigen, dass

$$(10) \quad (j_u, j_v, j_{uv}) = 0$$

ist, dass also die drei Vektoren  $j_u, j_v, j_{uv}$  linear zusammenhängen. Dazu genügt es offenbar zu zeigen, dass wir alle drei Vektoren etwa durch die beiden Vektoren  $\eta$  und  $\eta_v$  ausdrücken können, denn dann sind die drei Vektoren sämtlich parallel zu der von  $\eta$  und  $\eta_v$  aufgespannten Ebene, sind also linear abhängig. Nach (9) ist  $j_u$  parallel zu  $\eta$ . Um zu zeigen, dass  $j_v$  sich durch  $\eta$  und  $\eta_v$  ausdrücken lässt, differenzieren wir (7) nach  $v$ :

$$(11) \quad j_v = \beta_u \eta - \beta \eta_v - \beta' \eta$$

oder nach (4)

$$(12) \quad j_v = \alpha' \eta + \beta' \eta_v - \beta \eta_v - \beta_u \eta = (\alpha' - \beta_u) \eta + (\beta' - \beta) \eta_v$$

Und um ferner zu zeigen, dass sich auch  $j_{uv}$  durch  $\eta$  und  $\eta_v$  ausdrücken lässt, differenzieren wir (9) nach  $v$ :

$$(13) \quad j_{uv} = (\alpha + \beta_u)_v \eta + (\alpha + \beta_u) \eta_v$$

q. e. d.

3. a. aus 2. folgt, dass die Tangentialebenen der Fläche von den Vektoren  $\eta$  und  $\eta_v$  aufgespannt werden.

b. Die Schmiegungebenen der Kurven  $v = \text{const}$  werden von den Vektoren  $\eta$  und  $j_u$  aufgespannt.

Beweis:  $v = \text{const}$  sind die Rückkehrkanten der Torsen, die  $v = \text{const}$  entsprechen. Die Schmiegungeebene dieser Rückkehrkante wird von zwei benachbarten Systemstrahlen aufgespannt, also von  $\gamma$  und  $\gamma_u$ .

Betrachten wir einen Systemstrahl, er schneidet aus den beiden Brennflächen zwei Punkte  $\zeta$  und  $\zeta'$  heraus. Ausserdem gehen durch den Strahl zwei Ebenen hindurch, von denen die eine durch eine Torse, die andere durch  $v = \text{const}$  die andere Torse gekennzeichnet ist. Und diese Ebenen sind einmal die Schmiegungeebenen der Rückkehrkante, andererseits sind sie auch die Tangentialebenen der Brennflächen, und zwar ist die Fl $\alpha$   $h_\alpha$ , die für die eine Brennfläche Schmiegungeebene ist, für die andere Tangentialebene.

Betrachten wir nun den Winkel, den diese beiden Ebenen einschliessen. Wir kennen schon ein Beispiel, wo dieser Winkel ein rechter ist. Das sind die Normalen auf der Brennfläche. In dem Falle durchstossen sich die Torsen senkrecht. Diese Tatsache kann man so formulieren:

Die Schmiegungeebenen der Kurve  $v = \text{const}$  stehen senkrecht auf der Tangentialebene von  $\gamma$ .

Sehen wir uns nun den zugehörigen Streifen  $v = \text{const}$  an. Das ist ein Streifen, bei dem die Streifenenebene senkrecht auf der Schmiegungeebene steht. Einen solchen Streifen haben wir früher einen geodätischen Streifen genannt. Die zugehörigen Kurven nannten wir geodätische Linien. Es sind also dann die Kurven  $v = \text{const}$  geodätische Linien auf .

§47: Die Hauptdralle und ihre Bedeutung für den Drall beliebiger Richtung und den Kehlpunktsabstand.

Wir wollen nun wirklich konkret untersuchen, wie sich der Drall einer Fläche und wie sich der Kehlpunktsabstand ändert. Man wird da am zweckmässigsten so verfahren, dass man in dem betrachteten Punkte möglichst einfache Parameter wählt. Wir spezialisieren also. Dabei wollen wir alle Differentialformen so einfach wie möglich haben. Da ist offenbar das einfachste

$$(1) \quad e = g = 1$$

$$(2) \quad f = 0,$$

d.h. die Parameterkurven stehen, auf der Kugel gesehen, senkrecht aufeinander. Ausserdem ist der Massstab längs der Kurven  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  überall derselbe.

Das kann man nun auf verschiedene Weise erhalten. Wir brauchen ja auf der Kugel nur zwei orthogonale Richtungen in jedem Punkte auszuzeichnen und die Masstäbe entsprechend zu wählen. Da haben wir also noch eine Drehung frei.

Das Problem, die Extremwerte des Dralles zu bestimmen, ist äquivalent damit, die Hauptkrümmungen aufzusuchen. Da ergibt sich also: Es gibt zwei Richtungen, in denen der Drall Extremwerte annimmt. Wir wollen verlangen, dass die Richtungen so gewählt werden, dass die Hauptkrümmungen herauskommen. Wenn wir längs  $u=\text{const}$  entlanggehen und den Drall berechnen, dann werden die Hauptdralle

$$(3) \quad \frac{1}{\delta_1} = L$$

$$(4) \quad \frac{1}{\delta_2} = N$$

Nun müssen diese Richtungen aber die Polarform von III annullieren. Das ergibt

$$M + M' = 0$$

oder

$$(5) \quad M = -M'$$

Nennen wir nun den Winkel zwischen der Fortschreitungsrichtung und der Richtung von  $v=\text{const}$ , so ist

$$(6) \quad \cos \varphi = \frac{du}{\sqrt{du^2 + dv^2}}$$

Es ist nun der Drall

$$(7) \quad \frac{1}{\delta} = \frac{L du^2 + (M+M') du dv + N dv^2}{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}$$

Setzen wir (1), (2) und (5) ein, so folgt

$$(8) \quad \frac{1}{\delta} = \frac{L du^2 + N dv^2}{du^2 + dv^2}$$

und wenn wir noch (3), (4) und (6) einsetzen und berücksichtigen, dass  $u=\text{const}$  und  $v=\text{const}$  senkrecht aufeinander stehen,

$$(9) \quad \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{\delta_2} \sin^2 \varphi$$

Diese Formel gestattet also die Berechnung des Dralles in einer Richtung, die mit der Richtung von  $\mathbf{t}=\text{const}$  den Winkel  $\varphi$  einschliesst und aus den beiden Hauptdrallen. Es ist also ein Analogon zur EULERSchen Formel, die dieselbe Aussage über die Hauptkrümmungen macht.

Wir wollen hier im Anschluss an die Betrachtung des Hauptdral noch die Bemerkung einschieben:

Reelle Torsen erhalten wir nur dann, wenn die Hauptdralle verschiedenes Vorzeichen haben, wenn also

$$(10) \quad \frac{1}{s_1 s_2} < 0$$

ist. Für den Winkel  $\varphi$  der Torsenebene mit der Richtung  $v = \text{const}$  erhalten wir

$$(11) \quad \tan^2 \varphi = - \frac{s_2}{s_1}$$

Daraus folgt, dass die Ebenen der Torse symmetrisch zu den Ebenen der Hauptdralle liegen. Und zwar schliessen die Torsen einen rechten Winkel ein, d.h. schliesst jede Torse mit der Hauptdrallebene einen Winkel von  $45^\circ$  ein, wenn

$$(12) \quad - \frac{s_2}{s_1} = 1$$

ist. Dann ist also

$$(13) \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2}$$

und aus (12) folgt, dass dann die Dralle entgegengesetzt gleich sind, dass also

$$(14) \quad \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 0$$

ist.

Gehen wir nun zum Kehlpunkt Abstand über. Ich behaupte, dass er allgemein unabhängig von der Wahl des Parameters ist. Es gelten zunächst die Gleichungen

$$(15) \quad \gamma_u = - \gamma \times \gamma_v$$

$$(16) \quad \gamma_v = \gamma \times \gamma_u$$

Das haben wir zu beweisen. Wir müssen zeigen, dass Richtung und Länge auf beiden Seiten gleich sind. Betrachten wir (15).  $\gamma_u$  hat die Länge 1, da  $e = g = 1$  ist. Rechts steht der Flächeninhalt eines Parallelogrammes. Die Vektoren haben die Länge 1, der Winkel ist ein rechter, weil  $\gamma_v$  senkrecht auf  $\gamma$  steht. Also steht rechts auch der Wert  $\pm 1$ . Um die Richtung zu untersuchen, Multiplizieren wir (15) mit  $\gamma_u$ :



$$(17) \quad \gamma_u^L = -(\gamma \times \gamma_v) \gamma_u = -(\gamma, \gamma_v, \gamma_u)$$

also 
$$\gamma_u^L = 1$$

Ganz entsprechend verifiziert man (56), indem man, um etwa die Richtungsverhältnisse zu zeigen, mit  $\gamma_v$  multipliziert. Dann wird

$$(18) \quad E = \gamma_u \gamma_u = -(\gamma_u, \gamma, \gamma_v) = +(\gamma, \gamma_u, \gamma_v) = M$$

$$(19) \quad F = \gamma_u \gamma_v = -(\gamma_u, \gamma, \gamma_u) = -(\gamma, \gamma_u, \gamma_u) = -L = -\frac{1}{\sigma_1}$$

$$(20) \quad F' = \gamma_v \gamma_u = -(\gamma_v, \gamma, \gamma_v) = +(\gamma, \gamma_v, \gamma_v) = N = \frac{1}{\sigma_2}$$

$$(21) \quad G = \gamma_v \gamma_v = (\gamma_v, \gamma, \gamma_u) = -(\gamma, \gamma_v, \gamma_u) = -M' = M = E$$

Nun gehen wir daran,  $l$  zu berechnen. Wir hatten

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{II}{I} = \frac{E du^2 + (F+F') du dv + G dv^2}{e du^2 + 2f du dv + g dv^2} \\ &= \frac{E du^2 + (F+F') du dv + G dv^2}{du^2 + dv^2} \\ &= E \left( \frac{du}{du^2 + dv^2} \right)^2 + (F+F') \frac{du dv}{du^2 + dv^2} + G \left( \frac{dv}{du^2 + dv^2} \right)^2 \\ &= M \cos^2 \varphi + \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) \cos \varphi \sin \varphi + M \sin^2 \varphi \\ &= M + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) \sin 2\varphi \end{aligned}$$

also

$$(22) \quad -1 = M + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) \sin 2\varphi$$

Auffallend ist, dass in der Formel für den Kehlpointsabstand noch die Grösse  $M$  additiv steckt. Das darf aber nicht wunder nehmen, es ist  $fa$   $l$  der Abstand der Abstand des Kehlpoints von der Führungsfäche, und über diese Fläche haben wir noch keinerlei Voraussetzungen gemacht. Es gibt also  $M$  an, wie weit wir von der Fläche  $M=0$  entfernt sind. Es ist also am zweckmässigsten, die Führungsfäche so zu wählen, dass

$$(23) \quad M = (\gamma, \gamma_u, \gamma_v) = 0$$

wird. Dann erhalten wir in diesem Falle für der Kehlpointsabstand

$$(24) \quad l = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} \right) \sin 2\varphi.$$

Für  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  verschwindet also der Kehlpointsabstand. Da handelt es sich aber um die beiden Hauptdrehrichtungen. Wir sehen also:

Für die beiden Hauptdrehrichtungen verschwindet der Kehlpointsabstand.

Ferner sehen wir, dass, wenn wir  $\varphi$  durch  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  ersetzen, sich der Wert für  $l$  nicht ändert. Es sind also die Kehlpunkte gepaart, es gehören immer zwei zusammen. Und wenn wir schliesslich  $\varphi$  durch  $-\varphi$  ersetzen, nimmt der Kehlpointsabstand seinen negativen Wert an. Die Kehlpunkte gehen also symmetrisch zur Fläche  $M = 0$  hinauf und herunter. Insbesondere sind also die Brennpunkte, die Kehlpunkte der Torsen, symmetrisch zum Hauptkehlpoint (der Fläche  $M = 0$ ). Es halbiert also der Hauptkehlpoint die Brennweite.

Für  $\sin 2\varphi = 1$ , d. h.  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , bekommen wir die extremen Ausschläge des Kehlpoints. Wenn ich also die Hauptrichtungen um  $45^\circ$  drehe, bekomme ich den grössten Kehlpointsabstand. Es kann nun sein, dass die extremalen "Grenzpunkte" mit den Brennflächen zusammenfallen. Dann müssen offenbar auch die Brennpunkte unter Winkeln von  $45^\circ$  zu den Hauptrichtungen liegen, d. h. die Torsen stehen senkrecht aufeinander. Wir werden später sehen, dass dieser Fall nur bei Normalsystemen möglich ist.

Ein weiterer interessanter Sonderfall tritt ein für

$$\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} = 0$$

oder

$$(25) \quad \frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2}$$

Dieser Fall ~~xxxxxxx~~ entspricht dem des Nabelpunktes in der Flächentheorie. In dem dortigen Fall wurden dann die Krümmungsrichtungen unbestimmt. So werden auch hier die Hauptrichtungen unbestimmt werden. Wir können dann unser System wählen wie wir wollen, und immer hat es die gewünschte Eigenschaft:  $l$  behält immer den konstanten Wert  $M$ . Dann ist also auch  $\frac{1}{c_1}$  und  $l$  konstant. Man nennt derartige Kongruenzen nach RIEMANN isotrope Kongruenzen.

#### §48: Normalsysteme.

Wir wollen nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür untersuchen, dass eine Linienkongruenz ein Normalsystem ist. Als notwendige Bedingung haben wir schon erkannt, dass die Torsenebenen senkrecht aufeinander stehen. Um nun die hinreichenden Bedingungen aufzustellen, wollen wir zunächst die notwendige Bedingung umformen. Es muss also sein

$$(1) \quad 2 \gamma = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$(2) \quad \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 0$$

d.h. für uns r spezielles Koordinatensystem

$$(3) \quad F = F'$$

oder

$$(4) \quad \delta u \gamma_u = \delta v \gamma_v$$

Wir wollen beweisen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, wollen also beweisen, dass ein System dann und nur dann normal ist, wenn es möglich ist, von einer Fläche zu einer anderen überzugehen, die auf ihr senkrecht steht, wenn also

$$(5) \quad \gamma \perp (\delta + \lambda \gamma)$$

Setzen wir

$$(6) \quad \gamma = \delta + \lambda \gamma$$

so soll, wenn die Systeme normal sein sollen, die Bedingung ~~erfüllt sein~~

$$(7) \quad \gamma \gamma_u = 0$$

$$(8) \quad \gamma \gamma_v = 0$$

bei unserer speziellen Parameterwahl hinreichend sein.

Es ist nun nach (6)

$$\gamma_u = \delta_u + \lambda \gamma_u + \lambda_u \gamma$$

$$\gamma_v = \delta_v + \lambda \gamma_v + \lambda_v \gamma$$

Also wird

$$(9) \quad \gamma \gamma_u = \gamma \delta_u + \lambda \gamma \gamma_u + \lambda_u \gamma^2$$

$$(10) \quad \gamma \gamma_v = \gamma \delta_v + \lambda \gamma \gamma_v + \lambda_v \gamma^2$$

oder unter Benutzung von (7) und (8) und der Tatsache, dass  $\gamma \gamma_u$  und  $\gamma \gamma_v$  verschwinden,

$$(11) \quad \gamma \delta_u = -\lambda_u \gamma^2$$

$$(12) \quad \gamma \delta_v = -\lambda_v \gamma^2$$

Wenn nun  $\lambda$  von  $u$  und  $v$  abhängen soll, so muss offenbar sein

$$(13) \quad \lambda_{uv} = \lambda_{vu}$$

Daraus folgt nach (11) und (12)

$$(14) \quad (\gamma_{\alpha}^{\alpha})_v = (\gamma_{\alpha}^{\alpha})_u$$

oder

$$\gamma_{\alpha}^{\alpha} \gamma_{uv} + \gamma_{\alpha}^{\alpha} \gamma_{vu} = \gamma_{\alpha}^{\alpha} \gamma_{vu} + \gamma_{\alpha}^{\alpha} \gamma_{uv}$$

oder

$$(15) \quad \gamma_{\alpha}^{\alpha} \gamma_{uv} = \gamma_{\alpha}^{\alpha} \gamma_{vu}$$

und das ist genau die Bedingung (4). Es liefert also dieselbe Bedingung, die die Normalität der Torse ergibt, auch die Existenz der Grösse  $\lambda$ , die die Normalfläche reguliert.

Diese Ableitung gilt für jeden Parameter. Es muss also die Relation (15) invariant gegenüber einer Parametertransformation sein. Es sind, wie wir nun gesehen haben, die vier Bedingungen

1.) Normalsystem, 2.) entgegengesetzt gleiche ~~Exzentrizität~~ Hauptdralle, 3.) Orthogonalität der Torsen, 4.) die Torsen schneiden auf den Brennflächen geodätische Linien aus, identisch.

#### § 49: Der Satz von MALUS.

Praktisch finden wir Linienkongruenzen verwirklicht in der geometrischen Optik. Betrachten wir eine punktförmige Lichtquelle, so sendet die Lichtstrahlen aus, die wir als ein Normalsystem von Geraden deuten können, denn wir können ja Kugeln hindurchlegen, die alle Geraden senkrecht schneiden. Da lautet nun der Satz von MALUS:

Wenn ein Normalsystem von Lichtstrahlen beliebig gespiegelt oder gebrochen wird, so bleibt es doch immer ein Normalsystem.

Diesen Satz wollen wir beweisen. Zu dem Zwecke ziehen wir das SNEELLIUS'sche Brechungsgesetz heran. Gegeben sei eine Ebene  $\zeta(u, v)$ . Das Lot auf diese Ebene sei  $\xi$ . Dann heisst das Gesetz von SNEELLIUS:

1.) Einfallender Strahl  $\gamma$  und ausfallender Strahl  $f$  liegen in einer Ebene mit  $\xi$ :

$$(1) \quad (\gamma, f, \xi) = 0$$

## 2.) Das Verhältnis

$$(2) \quad \frac{\sin(\xi, \eta)}{\sin(\xi, \zeta)} = \text{const}$$

längs der ganzen Fläche ,

Aus der ersten Bedingung folgt dass sich  $\zeta$  linear aus  $\eta$  und  $\xi$  darstellen lässt. Es gibt also Konstante  $\alpha$  und  $\beta$  so, dass

$$(3) \quad \zeta = \alpha \xi + \beta \eta$$

Dabei nehmen wir an, dass  $\eta$ ,  $\zeta$  und  $\xi$  Einheitsvektoren sind. Dann ist also

$$(4) \quad \zeta \times \xi = \beta (\eta \times \xi)$$

Nehmen wir die Beträge, so folgt

$$(5) \quad \sin(\zeta, \xi) = |\beta| \sin(\eta, \xi)$$

Dann folgt aber aus (2)

$$(6) \quad \beta = \text{const}$$

auf der ganzen Fläche. Es muss also (3) gelten mit konstantem  $\beta$ . Wir wählen nun die Fläche, an der gebrochen wird, als Führungskurve von  $\eta$  und  $\zeta$ . Dann wird

$$(7) \quad (\zeta_u \zeta_v) - (\zeta_v \zeta_u) \\ - (d_u \zeta + \alpha \zeta_u + \beta \eta_u) \zeta_v - (d_v \zeta + \alpha \zeta_v + \beta \eta_v) \zeta_u$$

oder wegen

$$(8) \quad \zeta_u \zeta_v = \zeta_v \zeta_u = 0$$

$$(9) \quad (\zeta_u \zeta_v) - (\zeta_v \zeta_u) = \alpha (\zeta_u \zeta_v - \zeta_v \zeta_u) + \beta (\eta_u \zeta_v - \eta_v \zeta_u)$$

Nach Voraussetzung ist  $\eta$  ein Normalsystem, also

$$(10) \quad \eta_u \zeta_v - \eta_v \zeta_u = 0$$

so dass aus (9) wird

$$(11) \quad \zeta_u \zeta_v - \zeta_v \zeta_u = \alpha (\zeta_u \zeta_v - \zeta_v \zeta_u)$$

Nun sind aber jedenfalls die  $\zeta$  ein Normalsystem, also verschwindet die rechte Seite, also auch die linke, und wir sehen

in der Tat, dass die  $\gamma$  nur dann ein Normalsystem bilden, wenn auch die  $\gamma'$  eines bilden. Ein weitergehendes Problem ist nun, zu untersuchen, ob man nicht ein allgemeineres System einführen kann, das dieselben Bedingungen erfüllt.

#### ABSCHNITT IV: INTEGRATIONSTHEORIE.

Wir haben uns bisher immer mit Differentialformen beschäftigt. Jetzt wollen wir untersuchen, ob und wie man die Gestalt des zu den gegebenen Differentialgleichungen gehörigen Kurven- oder Flächenbildes ermitteln kann. Da gehen wir entsprechend der früheren Einteilung schrittweise vor.

#### 1. Kapitel: Integration der Krümmungsgrößen.

#### §50: Lösung eines Systemes von n linearen Differentialgleichungen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit Raumkurven. Da beweisen wir zunächst einen Satz, den wir früher schon einmal heuristisch uns klargemacht haben:

Wenn zwei Funktionen eines Parameters gegeben sind, etwa stetig im Intervall  $0 \leq s \leq 1$ , dann gibt es immer eine Raumkurve, deren Krümmung und Windung die beiden gegebenen Funktionen sind, wobei der Parameter als Bogenlänge gewählt ist; und es gibt im wesentlichen nur eine solche Raumkurve.

Dass hier wirklich ein Integrationsproblem vorliegt, kann man sich auf folgende Weise klar machen. Wir wollen einen Vektor  $\gamma(s)$  bestimmen. Er hat drei Komponenten; wir werden also drei Relationen brauchen, ihn zu bestimmen. Und drei Relationen sind uns in der Tat in den beiden Funktionen gegeben. Ist nämlich  $s$  die Bogenlänge, so gelten die drei Gleichungen

$$(1) \quad \gamma'^2 = 1$$

$$(2) \quad \gamma''^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

$$(3) \quad \frac{(\gamma' \cdot \gamma'' \cdot \gamma''')}{\gamma''^2} = \frac{1}{\tau}$$



Das einfachste Beispiel für ein solches Integrationsproblem wäre  $x' = x$ . Da heisst die Lösung  $x = a e^x$ . Und da sehen wir schon, dass noch gewisse Konstante frei verfügbar bleiben. Es genügt also zur eindeutigen Bestimmung der  $x_k$  nicht, ein derartiges Gleichungssystem vorzugeben. Man muss noch Anfangswerte vorschreiben. Und so wollen wir denn vorschreiben dass an der Stelle  $t = 0$  gelten soll  $x_i = x_i^0$ . Dabei sind die Grössen  $x_i^0$  irgendwelche gegebenen Werte. Wir behaupten, dass, wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, es in einem gewissen vorgeschriebenen Intervalle ein und nur ein Lösungssystem  $x_k$  der Gleichungen (6) gibt. Dabei genügt es, von den  $a_{ik}$  Stetigkeit zu verlangen. Natürlich müssen sie auch beschränkt sein.

Diesen Satz wollen wir nun beweisen. Zu dem Zwecke schreiben wir das Gleichungssystem (6) in integrierter Form:

$$(8) \quad x_i = x_i^0 + \int_0^t \sum_k a_{ik} x_k dt$$

oder

$$(9) \quad x_i(t) = x_i^0 + \int_0^t \sum_k a_{ik} x_k dt$$

Denken wir uns nun eine beliebige stetige Funktion, die die richtigen Anfangswerte hat. Die setzen wir auf der rechten Seite ein und erhalten dann im allgemeinen auf der linken Seite etwas von  $x_i$  verschiedenes. Aber wir wissen, dass diese Funktion die richtigen Anfangswerte hat. Diese neue Funktion, die wir anstelle  $x_i(t)$  auf der linken Seite erhalten haben, setzen wir wieder rechts ein und bekommen links wieder eine neue Funktion, usw.. Wir erhalten also für jedes  $x_i$  eine Folge von Funktionen. Wenn diese Folge konvergiert, dann ist der Grenzwert die Lösung der Differentialgleichung. Wir haben also nur die Konvergenz dieses Verfahrens zu beweisen.

Beim  $n$ -ten Schritt erhalten wir die Gleichung

$$(10) \quad x_i^{(n)} = x_i^0 + \int_0^t \sum_k a_{ik} x_k^{(n-1)} dt$$

Wenn wir  $n \rightarrow \infty$  gehen und geht dann  $x_i^{(n)} \rightarrow y$ , so ist  $y$  die gesuchte Lösung der Differentialgleichung. Ist diese Grenzfunktion stetig, so ist sie auch, da das Integral existiert differenzierbar.

Die Konvergenz dieses Verfahrens zeigen wir nun auf folgende Weise: Wir schätzen die Differenzen ab, betrachten also den Ausdruck

$$(11) \quad \Delta_i^{(n)}(t) = x_i^{(n)}(t) - x_i^{(n-1)}(t)$$



Wir setzen nun

$$(12) \quad \text{Max } |\Delta_i^{(n)}(t)| = M^{(n)}(t)$$

Aus (10) und (11) folgt

$$(13) \quad \Delta_i^{(n)}(t) = \int_0^t \sum_k a_{ik} \Delta_k^{(n-1)}(t) dt$$

Da die  $a_{ik}$  beschränkt sein sollen, können wir setzen

$$(14) \quad \text{Max}_{\substack{0 < t < 1 \\ i, k=1, \dots, m}} a_{ik}(t) = A$$

Jetzt schätzen wir ab. Aus (13) folgt nach (12) und (14) und unter Benutzung der Tatsache, dass das Integral höchstens gleich dem Produkt aus Weglänge und Maximum des Integranden ist:

$$(15) \quad |\Delta_i^{(n)}(t)| \leq t m A M^{(n-1)}(t)$$

Diese Abschätzung gilt für jedes  $i$  und für das ganze Intervall  $0 < t < 1$ , also auch für den größten Wert, also auch für  $M$ :

$$(16) \quad M^{(n)}(t) \leq t m A M^{(n-1)}(t)$$

Das sieht aber noch gar nicht nach Konvergenz aus. Wir wollen daher schärfer abschätzen. Wenn wir das Verfahren der Abschätzung immer weiter fortsetzen, ergibt sich

$$(17) \quad M^{(n)}(t) \leq (tmA)^2 M^{(n-2)}(t) \leq \dots \leq (tmA)^{n-1} M^{(1)}$$

Es sei  $M^{(1)}$  eine Differenz, die aus den ersten Annäherungsfunktionen gewonnen ist. Wir wählen nun als Intervall

$$0 < t < \varepsilon$$

und wählen  $\varepsilon$  so klein, dass

$$(18) \quad t m A = \rho < 1$$

ist. Dann erhalten wir in (17) die Glieder einer geometrischen Reihe, die konvergent ist. Nun ist aber die Summe der  $M$  eine Majorante für die  $\Delta$ . Da die Reihe  $M$  so gut wie eine geometrische Reihe konvergiert, muss also  $\Delta$  mindestens ebensogut konvergieren.

Man kann nun die Abschätzung noch schärfer bekommen, wenn man nicht iteriert, sondern integriert. Wir gehen wieder aus von der Gleichung

$$(19) \quad \Delta_i^{(n)}(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^m a_{ik} \Delta_k^{(n-1)}(\tau) d\tau$$

Dann bekommen wir

$$(20) \quad M^{(n)}(t) \leq m \int_0^t M^{(n-1)}(\tau) d\tau$$

wobei

$$(21) \quad \max M^{(1)}(t) \leq B$$

Dann wird

$$(22) \quad M^{(2)}(t) \leq m A B t$$

$$(23) \quad M^{(3)}(t) \leq m \int_0^t m A B \tau d\tau = \frac{t^2}{2} (m A)^2 B$$

Allgemein behaupten wir

$$(24) \quad M^{(n)}(t) \leq \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (m A)^{n-1} B$$

Den Beweis führen wir durch Induktion. Die Formel gilt für  $n=3$ . Sie gelte für  $n$ . Dann folgt

$$(25) \quad \begin{aligned} M^{(n+1)}(t) &\leq m A \int_0^t \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (m A)^{n-1} B d\tau \\ &= (m A)^n B \int_0^t \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} d\tau \\ &= (m A)^n B \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Auf Grund der Formel (24) beweisen wir nun die Konvergenz unseres Verfahrens. Es ist die ~~xxxx~~ Funktion  $x_1(t)$  definiert durch

$$(26) \quad |x_1(t)| < |x_1^0(t)| + \sum M^{(n)}(t) < B e^{mAt}$$

Damit ist die Konvergenz in der Tat bewiesen. Es existiert also wirklich ein Grenzwert. Wir müssen nur noch beweisen, dass er eindeutig bestimmt ist und dass er stetig ist. Um die Stetigkeit der Funktion zu zeigen, schreiben wir das Gleichungssystem wieder in differenzierter Form. Wir dürfen eine Reihe nun dann gliedweise differenzieren, wenn die Glieder differenzierbar sind und wenn die Reihe der Ableitungen im betrachteten Intervall konvergiert.

Die  $\Delta$  sind Funktionen, die stetig sind, das Integral ist eine differenzierbare Funktion der oberen Grenze. Wir erhalten also

$$(28) \quad (\Delta_i^{(n)})' = \sum_k a_{ik} \Delta_k^{(n-1)}$$

Wir haben zu beweisen, dass die Reihe der Ableitungen absolut konvergiert. Wir bilden die Summe

$$(29) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_i^{(n)})' = \sum_k a_{ik} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_k^{(n-1)}$$

Die Summe auf der rechten Seite konvergiert, also muss auch die linke Seite konvergieren. Es ist also die Funktion differenzierbar im ganzen Intervall. Also ist sie erste recht stetig.

Wir haben nun nur noch die Eindeutigkeit unseres Verfahrens zu zeigen. Angenommen, es gäbe zwei Lösungen  $x_1(t)$  und  $y_1(t)$  unseres Gleichungssystemes. Dann heisst unsere Behauptung

$$(30) \quad x_1(t) \equiv y_1(t)$$

Da wenden wir die Linearität unseres Problems wesentlich an. Wir setzen

$$(31) \quad \delta_1(t) = x_1(t) - y_1(t)$$

Dann bilden wir die Differentialgleichung für  $x_1(t)$  und  $y_1(t)$  und subtrahieren sie voneinander. Anstelle nun die Differentialgleichungen zu nehmen, können wir auch die integrierte Form (8) oder (9) nehmen. Da beide Funktionen an der Stelle  $t=0$  denselben Wert  $x_1^0$  haben, fällt bei Subtraktion dieses Glied fort, und wir erhalten

$$(32) \quad \delta_1(t) = \int_0^t \sum_k a_{1k} \delta_k \, d\tau$$

Wir setzen nun

$$(33) \quad \max_{\substack{i=1, \dots, m \\ 0 < \tau < t}} |\delta_i(\tau)| = N(t)$$

und schätzen wieder ab

$$(34) \quad \delta_1(\tau) \leq m A t N(t)$$

für alle  $i$ , also auch für  $N(t)$ :

$$(35) \quad N(t) \leq m A t N(t)$$

oder

$$(36) \quad 0 \quad (m A t - 1) \dot{N}(t)$$

Dabei ist  $N$  eine nicht negative Zahl. Bei hinreichend kleinem  $t$  wird nun der Ausdruck auf der rechten Seite negativ. Es kann also nur sein

$$(37) \quad N(t) = 0$$

zunächst nur auf der Strecke  $|t| \leq \frac{1}{m A}$ . Am Endpunkte dieses Intervalls können wir aber das Verfahren fortsetzen, und so kommen wir durch das ganze Intervall hindurch. Es muss also im ganzen Intervall die Gleichung (37) erfüllt sein, d.h.  $\delta_1 = 0$  oder

$$(38) \quad x_1 = y_1 \quad \text{q.e.d.}$$

### §51: Anwendung auf die Integration einer Raumkurve nach den FRENETSchen Formeln.

Nach diesen allgemeinen Vorbereitungen kehren wir zu unserm Ausgangsproblem zurück. In den FRENETSchen Gleichungen haben wir ein System von homogenen Gleichungen vor uns. Da verfahren wir nun so. Wir teilen dem System an der Stelle  $s=0$  irgendwelche Werte zu und integrieren dann. Haben wir dann etwa die Lösung  $\xi_1$  gefunden, dann haben wir mittels der Gleichung

$$(1) \quad \gamma = \int \xi_1 ds$$

sucht die Kurve. Da steckt nun aber in den FRENETSchen Gleichungen noch mehr. Es handelt sich da nicht um beliebige Vektoren, sondern um Einheitsvektoren und zwar um den Tangential-, den Hauptnormalen- und den Binormalenvektor. Da dürfen wir schon die Anfangswerte nicht mehr beliebig vorschreiben, sondern wir haben sie so vorzugeben, dass die drei Anfangsvektoren ein orthogonales Dreieck bilden. Und das ergibt sich sofort wieder ein Satz: Wenn an der Stelle  $s = 0$  ein orthogonales Einheitsvektorensystem vorgegeben wird, so bleibt es ein solches entlang der Kurve. Um das zu beweisen, muss man die Schiefsymmetrie der Matrix der Koeffizienten der FRENETSchen Gleichungen benutzen.

Da brauchen wir zunächst einen allgemeinen Satz:

$$(2) \quad (\xi_i \xi_k)' = \sum_{i \neq k} a_{ik} \xi_{ik} + \sum b_{ik} (\xi_1^2 - \xi_k^2)$$

Die FRENETSchen Gleichungen sind ein Gleichungssystem von der Form

$$(3) \quad \xi'_i = \sum b_{ik} \xi_k$$

Ausserdem wissen wir, dass die Matrix  $(b_{ik})$  schiefsymmetrisch ist, dass also gilt

$$(4) \quad b_{ik} = -b_{ki}$$

Nach (3) wird

$$(5) \quad \xi_1 \xi'_i = \sum_k b_{ik} \xi_k \xi_i$$

und entsprechend

$$(6) \quad \xi_i \xi'_1 = \sum_k b_{1k} \xi_k \xi_i$$

Addieren wir (5) und (6), so wird

$$(7) \quad \xi_1 \xi'_i + \xi_i \xi'_1 = (\xi_i \xi_1)' = \sum_k (b_{1k} \xi_k \xi_i + b_{ik} \xi_k \xi_1)$$

Wenn alle  $\xi_i \xi_k$  verschwinden würden, wären wir fertig. Es verschwinden aber nicht alle, sondern nur die mit ungleichen Indizes. Wir müssen also die mit gleichen Indizes noch besonders betrachten. Gleiche Indizes treten auf, wenn  $i=k$  oder  $l=k$  ist, sonst nicht. Wir zerlegen also

$$(8) \quad (\xi_i \xi_1)' = \sum_{k \neq 1, i} (b_{1k} \xi_k \xi_i + b_{ik} \xi_k \xi_1) + b_{1i} \xi_i^2 + b_{ii} \xi_i \xi_1 \\ + b_{11} \xi_1 \xi_i + b_{i1} \xi_1^2$$

oder wegen

$$b_{ii} = b_{11} = 0$$

$$(\xi_i \xi_1)' = \sum_{k \neq 1, i} (b_{1k} \xi_k \xi_i + b_{ik} \xi_k \xi_1) + b_{1i} \xi_i^2 + b_{i1} \xi_1^2$$

oder wegen (4)

$$(9) \quad (\xi_i \xi_1)' = \sum_{k \neq 1, i} (b_{1k} \xi_k \xi_i + b_{ik} \xi_k \xi_1) + b_{1i} (\xi_i^2 - \xi_1^2)$$

Setzen wir  $i=1$ , so wird

$$(10) \quad (\xi_1^2)' = \sum_{k \neq 1} b_{1k} \xi_k \xi_1 = S_1$$

und



## 2. Kapitel: Integrationstheorie der Flächen und Linienkongruenzen.

### §52: Verallgemeinerung des Vektordreikantes.

Wenn wir nun zu der Integrationstheorie der Flächen übergehen, so müssen wir zunächst Verallgemeinerungen des Prinzipes vornehmen. Unsere bisherige Methode war speziell auf die einfachen Verhältnisse bei den Raumkurven zugeschnitten. So ist z. B. die Betrachtung eines Dreikantes aus Einheitsvektoren für die Behandlung der Regelflächen unzureichend. Auch bei den Regelflächen wird man ein Vektordreikant konstruieren. Man wird zunächst die Richtung der Regelgeraden durch einen Einheitsvektor charakterisieren. Dann könnte man als zweiten Vektor den Tangentialeinheitsvektor der Kehllinie nehmen. Der bildet aber mit der Regelgeraden im allgemeinen keinen rechten Winkel mehr. Also wird man die Orthogonalität des Dreikantes schon aufgeben müssen. Wir werden uns also mit Dreikanten beschäftigen müssen, die nicht mehr rechtwinklig sind, sondern die sich mehr der Fläche anpassen, bei denen also die Länge der Vektoren und ihre Stellung zueinander von dem Flächenparameter abhängen wird. Das ist die erste Verallgemeinerung, die wir treffen müssen. Und diese Verallgemeinerung müssen wir auch machen, wenn wir uns nicht mehr für Regelflächen und Streifen interessieren,

Die zweite Verallgemeinerung besteht darin, dass man mehrparametrische Systeme betrachten muss. Und diese Notwendigkeit wird ein spezifisch neues Problem in die Angelegenheit hineinbringen.

Unser erstes Problem ist also, durch vernünftige Vorgaben ein System von drei Vektoren  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  und  $\xi_3(t)$  zu bestimmen und eine Art FRENETSche Gleichungen für dieses System zu entwickeln. Wir betrachten o. B. d. A. ein Intervall

$$0 \leq t \leq 1$$

Dann ist ein solches Dreikant durch folgende Daten bestimmbar: Zunächst müssen die drei Vektoren für  $t=0$  vorgegeben werden,  $\xi_i(0)$ , und zwar so, dass sie linear unabhängig sind. Dann sollen im ganzen Intervall die skalaren Produkte

$$(\xi_l \xi_l') \quad (l, l=1, 2, 3)$$

gegeben sein. Wenn diese Produkte gegeben sind, so sind damit auch die Ableitungen

$$(1) \quad (\xi_l \xi_l')' = \xi_l \xi_l'' + \xi_l' \xi_l'$$

gegeben. Es ist also unsere Voraussetzung tiefergehend als

etwa die, dass die Ableitungen selbst  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)'$  wären.  
 Es sind nach unseren Voraussetzungen also die Vektoren, d.h. auch die skalaren Produkte ~~xxxxxxx~~ ~~xxxxxxx~~ Anfangspunkte und die Ableitungen im ganzen Intervalle gegeben. Dann ist schon von vornherein ersichtlich, dass dadurch die skalaren Produkte selbst auch im ganzen Intervalle gegeben sind. Als Nebenbedingung stellen wir die Forderung auf, dass

$$(2) \quad |\xi_1, \xi_2, \xi_3| \neq 0$$

ist.

Unsere Behauptung ist nun, dass, wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, das System der drei Vektoren  $\xi_1$  eindeutig bestimmt ist. Wir müssen zunächst noch zeigen, dass die beiden ersten Voraussetzungen keinen Widerspruch enthalten. Die erste gibt die skalaren Produkte im Nullpunkte. Es muss also gezeigt werden, dass die Determinante (2) im Nullpunkte nicht verschwindet. Das ist aber eine algebraische Tatsache, dass die Determinante von drei unabhängigen Vektoren nicht verschwindet.

Um unsere Behauptung zu beweisen, verfahren wir so: Wir konstruieren eine lineare Gleichung und weisen nach, dass sie eindeutig lösbar ist, und dass die Lösungen alles erfüllen, was wir verlangen. Wir versuchen, ob es uns gelingt, gewisse Größen  $a_{ik}$  so zu bestimmen, dass gilt

$$(3) \quad I = \xi_1' = \sum_k a_{ik} \xi_k$$

Wenn diese Gleichung gelten soll, so muss auch gelten

$$(4) \quad \xi_1 \xi_1' = \sum_k a_{ik} \xi_1 \xi_k$$

Die linke Seite ist durch die Vorgabe gegeben, das skalare Produkt auf der rechten Seite ebenfalls. Durch diese Gleichung sind also die  $a_{ik}$  eindeutig bestimmt, wenn man  $i$  festhält und die drei Gleichungen für  $i=1, 2, 3$  betrachtet. Das ergibt drei Gleichungen, aus denen sich, da die Determinante nicht verschwindet, die drei Größen  $a_{ik}$  bestimmen lassen.

Um unsere gesuchten Vektoren zu bekommen, haben wir also nur (3) zu integrieren. Die richtigen Anfangswerte bekommen wir dabei, das haben wir ja in die Voraussetzungen aufgenommen. Schwieriger ist schon, zu zeigen, dass das Lösungssystem von (3) auch die zweite Voraussetzung erfüllt. Um das zu zeigen, bilden wir



$$\xi_0 \xi_i' = \sum_k a_{ik} \xi_0 \xi_k,$$

$$\xi_0' \xi_i = \sum_k a_{ik} \xi_i \xi_k,$$

und addieren:

$$(5) \quad (\xi_0 \xi_i)' = \sum_k (a_{ik} \xi_0 \xi_k + a_{ik} \xi_i \xi_k),$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung für  $\xi_1 \xi_1$ . Es sind also Vorgabe und Lösung Lösungen derselben homogenen Differentialgleichung. Damit sie identisch sind, ist nur nötig, dass sie an einer Stelle übereinstimmen, und das tun sie nach Voraussetzung.

Wir haben also nur noch nachzutragen, wie es mit der Determinante steht. Es ist

$$(6) \quad |\xi_1 \xi_1| = |\xi_1, \xi_2, \xi_3|^2 = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \xi_{31} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \xi_{32} \\ \xi_{13} & \xi_{23} & \xi_{33} \end{vmatrix} \\ = \sum_k \xi_{1k} \xi_{1k} = |\xi_1 \xi_1|$$

Also besteht in der Tat die Lösung aus unabhängigen Vektoren.

Bei den richtigen Frenetschen Formeln war die Spezialisierung die, dass die Vektoren orthogonale Einheitsvektoren waren; wir haben nachzuweisen, dass diese Tatsache mit der Schiefsymmetrie der Matrix zusammenhängt. An dem Beispiel der richtigen Frenetschen Formeln kann man sich gut klar machen, warum man die Ausdrücke  $\xi_1 \xi_1'$  vorgeben muss und nicht die Ableitungen  $(\xi_1 \xi_1)'$ , denn bei den Frenetschen Formeln sind ja diese Ableitungen immer Null. Es würde also die Vorgabe der Ableitungen nichtsweiter liefern als die Starrheit des Orthogonalsystemes.

Bei den Frenetschen Gleichungen treten die Ausdrücke  $\frac{d\xi}{ds}$  und  $\frac{d\xi}{dt}$  auf. Es müssen sich also auch die skalaren Produkte durch diese beiden Größen ausdrücken lassen. Es war

$$(7) \quad \xi_1' = \frac{d\xi_1}{ds},$$

Daraus ergibt sich durch Multiplikation mit  $\xi_2$

$$(8) \quad \xi_2 \xi_1' = \frac{d\xi_2 \xi_1}{ds},$$

und durch Multiplikation mit  $\xi_1$

$$(9) \quad \xi_1 \xi_1' = 0.$$

Ganz entsprechend ist dann

$$(10) \quad \xi_1 \xi_2' = -\xi_1' \xi_2 = -\frac{1}{r},$$

und

$$(11) \quad \xi_2 \xi_2' = 0$$

Sind also die geometrischen Daten bekannt, so lassen sich daraus die skalaren Produkte bestimmen.

### §53: Uebergang zu mehrparametrischen Systemen.

Nach der Ueberwindung der ersten Schwierigkeit gehen wir nun daran, zu mehrparametrischen Systemen überzugehen. Der Weg, den wir da einzuschlagen haben, wird so sein:

Man nimmt das Dreikant

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{u_1} \\ \xi_2 &= \xi_{v_1} \\ \xi_3 &= \xi_1 \end{aligned}$$

und sucht nun die Ausdrücke  $\xi_i \xi_j'$  zu berechnen. Man interessiert sich dafür, ob es möglich ist, etwas wie Differentialformen entsprechend den Formen I und II vorzugeben. Unsere Frage ist: Wenn wir die Vektoren  $\xi_{u_1}$ ,  $\xi_{v_1}$  und  $\xi_1$  an der Stelle  $u = v = 0$  vorgeben und auf der ganzen Fläche gewisse Differentialformen I und II, gibt es dann eine und nur eine Fläche, auf der die ~~gegebenen~~ <sup>gegebenen</sup> Werte vorhanden sind? Die Antwort lautet: Nein. Diese Eindeutigkeit gilt nur, wenn zwischen den Grössen  $E, F, G, L, M, N$  gewisse Relationen bestehen. Und das ist kein Wunder; denn zur Fixierung des Vektors  $\xi$  sind drei Gleichungen nötig; wenn aber die sechs Grössen vorgegeben werden, sind das sechs Gleichungen, und da ist nicht zu erwarten, dass etwas Eindeutiges, Vernünftiges dabei herauskommt. Es müssen offenbar noch Relationen zwischen den sechs Grössen erfüllt sein, damit die Fläche starr und bis auf Bewegungen bestimmt ist.

Ehe wir diesen Ansatz durchführen, müssen wir noch allgemein zweiparametrische Systeme untersuchen. Das werden wir folgendermassen versuchen. Man hat ein zweiparametrisches System und verlangt, dass ein Gleichungssystem

$$(2) \quad \xi_i' = \sum_k a_{ik} \xi_k$$

für jede Flächenkurve  $u(t)$  und  $v(t)$  existieren soll.

Es ist offenbar

$$(3) \quad \xi'_i = \xi_{iu} u' + \xi_{iv} v'.$$

Wir beherrschen also den Ausdruck  $\xi'_i$  vollständig, wenn wir die Ausdrücke  $\xi_{iu}$  und  $\xi_{iv}$  kennen. Das sind aber Sonderfälle von  $\xi'_i$  für  $u' = v' = 1$ . Es muss aber, wenn die Form I immer richtig sein soll, sie insbesondere richtig sein für die Richtungen  $u$  und  $v$ . Und umgekehrt können wir sagen, dass, wenn die Differentialform I für die Richtungen  $u$  und  $v$  richtig ist, sie auch überall richtig ist. Es bedingt also die Differentialform I eine zweite Differentialform II. Wir setzen:

$$(4) \quad II_1 = \xi_{iu} = \sum_k b_{ik} \xi_k$$

$$(5) \quad II_2 = \xi_{iv} = \sum_k c_{ik} \xi_k$$

Ich behaupte nun, dass aus diesen beiden Gleichungen die Gleichung (2) folgt, wobei

$$(6) \quad a_{ik} = b_{ik} u' + c_{ik} v'$$

ist. Man könnte nun (2) integrieren. Dann bekommt man in der Tat eindeutig den Vektor  $\xi$ . Aber man ist damit bei weitem noch nicht fertig, denn man hat dann nur die Lösung  $\xi$  längs einer Kurve. Und das wollen wir ja gar nicht, wir suchen ja ein Lösungssystem, das von  $u$  und  $v$  abhängt, aber nicht von einer Kurve. Wir müssen doch verlangen, dass das Lösungssystem, das nur von dem Orte abhängt, erreicht wird, auf welchem Wege wir uns auch bewegen mögen. Wir müssen also die Wegunabhängigkeit der Lösung verlangen.

Wenn wir gezeigt haben werden, dass die Lösung vom Wege unabhängig ist, dann sind wir in der Tat fertig. Um das zu tun, genügt es, zu zeigen, dass das Integral über einen geschlossenen Weg verschwindet, d.h. es ist

$$\int_{W_1}^P = \int_{W_2}^P \quad \text{äquivalent mit} \quad \int_{W_1}^P + \int_{W_2}^P = \oint_{W_1+W_2} = 0.$$

Wir wollen dieses Problem allgemein anfassen. Es sei ein Integral

$$\oint (\alpha u' + \beta v') dt$$

auf irgendeiner geschlossenen Kurve der  $uv$ -Ebene gegeben. Zu untersuchen ist, wann das Integral über diesen Weg verschwindet. Zu dem Zwecke formt man das Integral um:

$$(7) \quad \oint (A u' + B v') dt = \oint A du + B dv,$$

und das ergibt nach dem Satz von STOKES

$$(8) \quad \oint A du + B dv = \pm \int (A_v - B_u) du dv,$$

wobei das Integral <sup>auf</sup> ~~über~~ der rechten Seite über das von der Kurve umrahmte Flächenstück zu erstrecken ist. Das Vorzeichen auf der rechten Seite richtet sich danach, ob wir es mit einem Rechts- oder Linkssystem zu tun haben. Und nun sieht man sofort, dass das Integral dann und nur dann verschwindet, wenn überall

$$(9) \quad A_v = B_u$$

ist, und das ist von vorneherein an gewisse Voraussetzungen geknüpft. Es müssen die Funktionen  $A$  und  $B$  im ganzen Innern regulär sein.

Dieses Ergebnis können wir sofort auf unsern Fall anwenden. Das Integral lässt sich in unsere Vektorformel einsetzen. Wir schreiben die Vektorgleichung für die drei Komponenten hin und haben für die darin auftretenden drei Größen  $A$  und die drei Größen  $B$  jeweils Bedingungen zu erfüllen. Dass man das kann, liegt an der Linearität der Aussagen. Daraus liegt auch, dass das Integral dann und nur dann vom Wege frei ist, wenn

$$(10) \quad A_v = B_u$$

ist, wenn wir die drei Komponenten wieder zu Vektoren vereinigen. Es handelt sich also für uns darum, zu untersuchen, wann die Gleichung

$$(11) \quad \oint \sum_k a_{ik} \xi_k dt = 0$$

erfüllt ist. Zu dem Zwecke zerlegen wir

$$(12) \quad a_{ik} = b_{ik} u' + c_{ik} v'$$

Dann wird

$$(13) \quad \oint \sum_k a_{ik} \xi_k dt = \oint \left[ \left( \sum_k b_{ik} \xi_k \right) u' + \left( \sum_k c_{ik} \xi_k \right) v' \right] dt.$$

Wir setzen nun

$$(14) \quad \begin{aligned} \sum_k b_{ik} \xi_k &= A \\ \sum_k c_{ik} \xi_k &= B \end{aligned}$$

Dann muss immer (9) erfüllt sein, also unter Berücksichtigung von (4) und (5)

$$(15) \quad \xi_{i\bar{u}_v} = \xi_{iv_u}$$

Wir haben also bewiesen, dass die Bedingung (15) notwendig und hinreichend dafür ist, dass das Integral vom Wege unabhängig ist. Dieses Ergebnis ist nun unbefriedigend, denn wir kennen die Ausdrücke A und B nicht. Wir möchten doch Bedingungen haben, die nur  $b_{ik}$  und  $c_{ik}$  enthalten. Es ist nun

$$(16) \quad \begin{aligned} A_v &= \sum_I b_{i1_v} \xi_1 + \sum_k b_{ik} \sum_I c_{kl} \xi_1 \\ &= \sum_I \xi_1 (b_{i1_v} + \sum_k b_{ik} c_{kl}), \end{aligned}$$

und entsprechend

$$(17) \quad B_u = \sum_I \xi_1 (c_{i1_u} + \sum_k c_{ik} b_{kl}),$$

Da haben wir eine Form, die gestattet,  $\xi_1$  zu eliminieren. Die Gleichung (9) ist sicher dann erfüllt, wenn die Koeffizienten gleich sind. Das ergibt drei Gleichungen, und, wenn wir  $i$  die Werte 1, 2, 3 durchlaufen lassen, neun Gleichungen. Wenn diese Gleichungen bestehen, ist in der Tat der Vektor  $I$  als Ortsvektor bestimmbar. Andererseits sind diese Gleichungen auch notwendig, denn wir können ja das System  $I$  an jeder Stelle integrieren mit willkürlich vorgegebenem Anfangsvektor. Und das ergibt dann wirklich Gleichungen, die nur  $b$  und  $c$  enthalten. Es heisst dann unsere Integrabilitätsbedingung

$$(18) \quad \text{(III)} \quad b_{i1_v} - c_{i1_u} + \sum_k (b_{ik} c_{kl} - c_{ik} b_{kl}) = 0$$

§54: Zurückführung der skalaren Produkte  $\xi_1 \xi_1$  auf die Fundamentalgrößen.

Wir haben nun unsere Theorie auf die Flächen anzuwenden. Wir haben gesehen, dass er genügt, Anfangswerte und die Größen  $\xi_1 \xi_1$  vorzugeben, so dass eine gewisse Determinantenrelation erfüllt ist. In unserm Fall  $e$  haben wir dann die Größen  $\xi_1 \xi_{1u}$  und  $\xi_1 \xi_{1v}$  vorzugeben und nachzusehen, ob alle diese Ausdrücke für unsere Vektoren  $\xi$  sich auf die Größen  $E, F, G, L, M, N$  bringen lassen. Dabei haben wir zu ersetzen

$$(1) \quad \xi_1 = \xi_u, \quad \xi_2 = \xi_v, \quad \xi_3 = \xi.$$

Dann werden die Fundamentalgrößen

$$(2) \quad E = \xi_u^2$$

$$(3) \quad F = \xi_u \xi_v$$

$$(4) \quad G = \xi_v^2$$

$$(5) \quad L = \xi \xi_{uu} = - \xi_u \xi_u$$

$$(6) \quad M = \xi \xi_{uv} = - \xi_v \xi_u = - \xi_u \xi_v$$

$$(7) \quad N = \xi \xi_{vv} = - \xi_v \xi_v$$

Unter Berücksichtigung von (1) wird dann

$$(8) \quad L = \xi \xi_{11} = - \xi_1 \xi_{11}$$

$$(9) \quad M = \xi \xi_{12} = - \xi_2 \xi_{21}$$

$$(10) \quad N = \xi \xi_{22}$$

Für den Fall  $l=3$  haben wir das System also schon vollständig beisammen. Es fehlen noch die Größen für  $l \neq 3$ . Dabei genügt es, die Formel für  $u$  zu geben, denn für  $v$  sind sie dann ganz entsprechend. Es ist

$$(11) \quad \xi_1 \xi_{2u} = \xi_u \xi_{2v} = \frac{1}{2} E_v,$$

$$(12) \quad \xi_1 \xi_{3u} = \xi_u \xi_{3v} = \frac{1}{2} E_{uv},$$

$$(13) \quad \xi_2 \xi_{4u} = \xi_u \xi_{4v} = \xi,$$

$$(14) \quad \xi_2 \xi_{5u} = \xi_u \xi_{5v} = \frac{1}{2} G_u.$$

Um auch (13) zu erhalten, bilden wir

$$(15) \quad \begin{aligned} F_u &= (\xi_0 \xi_u)_u = \xi_u \xi_{uu} + \xi_{uv} \xi_u \\ &= \xi_u \xi_{uu} + \frac{1}{2} E_v. \end{aligned}$$

und erhalten somit

$$(16) \quad \xi_u \xi_{uu} = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

Damit haben wir den Beweis erbracht, dass unser System II sich durch die Fundamentalgrössen  $E, F, G, L, M, N$  ausdrücken lässt.

Damit sind wir aber noch nicht ganz fertig. Vermittels unserer Angaben werden durch reine Determinantenrechnung die Grössen  $b_{ik}$  und  $c_{ik}$  ausgedrückt. Nun wissen wir aber, dass unser System nur dann eine Lösung besitzt, wenn III erfüllt ist. Es müssen also die Fundamentalgrössen noch neun Gleichungen genügen. In Wirklichkeit ist es nun so, dass von diesen neun Gleichungen nur drei unabhängige übrigbleiben. Wenn die noch erfüllt sind, dann dürfen wir endgültig integrieren. Wir müssen dafür sorgen, dass die Determinante nicht verschwindet. Es heisst nun die Determinante

$$(17) \quad \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_2 \xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & \xi_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = E G - F^2$$

Es genügt also, zu verlangen, dass

$$(18) \quad E G - F^2 > 0$$

ist, dass also die Form I positiv definit ist.

§55: Die Gaussischen Ableitungsformeln.

Jetzt haben wir zwar unser Vektorsystem,  $\xi_1$ , aber noch immer nicht die Fläche  $\mathcal{F}$ . Da treffen wir auf ein Problem, das wir schon einmal gelöst haben. Wir wollen  $\mathcal{F}$  so bestimmen, dass

$$(1) \quad \xi_u = \xi_{1u}$$

$$(2) \quad \xi_v = \xi_{1v}$$

wird. Dann sind  $\xi_1$  und  $\xi_2$  vorgegebene Vektoren, die von  $u$  und  $v$  abhängen. Nun erhebt sich die Frage: Wann gibt es einen Vektor  $\xi$ , der unserem Gleichungssystem genügt? Die Antwort lautet:

Notwendig und hinreichend ist, dass gilt

$$(3) \quad \xi_{1v} = \xi_{2u}$$

Das haben wir zu beweisen. Wir betrachten unsere Vorgabe

$$(4) \quad \xi_1 \xi_{1v} - \xi_2 \xi_{2u} = 0 \quad (1 = 1, 2, 3)$$

oder, wenn wir die Komponenten ausschreiben

$$(5) \quad \xi_{11}(\xi_{11v} - \xi_{21u}) + \xi_{12}(\xi_{12v} - \xi_{22u}) + \xi_{13}(\xi_{13v} - \xi_{23u}) = 0$$

Diese Gleichung besagt, dass der Vektor  $\xi_{1v} - \xi_{2u}$  auf drei Vektoren  $\xi_1$  senkrecht steht, die nicht in einer Ebene liegen. Das ist aber nur möglich, wenn

$$(6) \quad \xi_{1v} - \xi_{2u} = 0$$

ist. Also ist die Relation (3) erfüllt. Wir können also integrieren. Wir können also in der Tat  $\mathcal{F}$  so wählen, dass (1) und (2) erfüllt sind. Es ist dann  $\xi_3$  der Normalenvektor, denn er ist dadurch bestimmt, dass er die Länge 1 hat und auf  $\xi_1$  und  $\xi_2$  senkrecht steht. Es ist also

$$(7) \quad \xi_3 \xi_1 - \xi_3 \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_3^2 = 1$$



Dann haben also unsere drei Vektoren wirklich die Bedeutung, die sie haben sollen, und das System liefert, was verlangt wird, nämlich die Fläche, welche die Formen I und II als Fundamentalformen besitzt. Als hinreichende und notwendige ~~Bedingungen~~ Bedingungen treten dabei neun Gleichungen auf, von denen nur drei voneinander unabhängig sind. Es wird also in der Tat die Gestalt der Fläche durch die beiden ersten Fundamentalformen bestimmt.

Man schreibt historisch die Grössen in den Gaussischen Ableitungsformeln

$$\begin{aligned} g_{uu} &= \binom{11}{1} g_u + \binom{11}{2} g_v + L \xi, \\ (8) \quad g_{uv} &= \binom{12}{1} g_u + \binom{12}{2} g_v + M \xi, \\ g_{vv} &= \binom{22}{1} g_u + \binom{22}{2} g_v + N \xi, \end{aligned}$$

und in den Formeln von Weingarten

$$\begin{aligned} (9) \quad \xi_u &= A_1 g_u + A_2 g_v, \\ \xi_v &= B_1 g_u + B_2 g_v. \end{aligned}$$

-----  
 V. Abschnitt: Geometrie auf einer Fläche.  
 =====

§56: Das Gaussische Theorema egregium.

Wir werden uns nun mit den Massen auf einer Fläche BESCHÄFTIGEN! Man kann doch auf einer beliebigen Fläche etwa auf der Erde, messen und bekommt dann gewisse Winkel und Längen. Und mit diesen Winkeln und Längen wollen wir uns beschäftigen. Die einzige Fläche, mit deren inneren Massen wir uns schon beschäftigt haben, ist die Ebene. Da gibt es gerade gerade Linien und Winkel. Die erste Hoffnung wäre also, dass man jede Fläche längen- und winkeltreu in eine Ebene abbilden könnte und dass man so einfach die Masse überpflanzen könnte. Und dass es so etwas nicht gibt, ist eine Tatsache, die von Gauss bewiesen worden ist. Wir werden sehen, dass fast keine Fläche längen- und winkeltreu auf die Ebene abgebildet werden kann. Dass es einige solche Flächen gibt, haben wir schon gesehen, so lassen sich die Torsen, Zylinder und Kegel auf die Ebene abwickeln. Wir werden sehen, dass dies auch die einzigen Flächen sind, die das tun. Nun sehen wir, dass gerade diese Flächen

auch durch eine andere Eigenschaft ausgezeichnet sind: sie haben verschwindende Gaussische Krümmung. Wir werden also vermuten, dass die Abbildbarkeit auf die Ebene etwas mit der Gaussischen Krümmung zu tun haben wird. Wir hatten für die Gaussische Krümmung gefunden

$$(1) \quad K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{L N - M^2}{E G - F^2} .$$

Es besagt nun das theorema egregium:

Die Gaussische Krümmung  $K$  lässt sich allein durch die Grössen  $E, F, G$  der ersten Fundamentalf orm ausdrücken.

Das ist zunächst recht formal. Es steckt aber ein wesentlicher geometrischer Satz dahinter, denn wenn man diese drei Grössen beherrscht, kennt man auch alle Längen und Winkel. Wenn man also formal beweisen kann, dass die Gaussische Krümmung nur von  $E, F, G$  abhängt, dann haben wir auch ein Mittel in der Hand,  $K$  durch die Längen und Winkel in der Fläche auszudrücken. Wenn also dann zwei Flächen dieselben Grössen  $E, F, G$  haben, so haben sie auch gleiche Gaussische Krümmung. Diese Tatsache können wir auch so wenden: Damit zwei Flächen Längen- und winkeltreu aufeinander bezogen werden können, ist notwendig, dass sie in entsprechenden Punkten dieselbe Gaussische Krümmung besitzen. Und damit kommt diese zunächst formal anmutende Beziehung in unser Problem hinein. Es hat nun die Ebene, wie wir nachher sehen werden, die Gaussische Krümmung Null. Wenn das wahr ist, so folgt aus dem ebenfalls noch zu beweisenden theorema egregium, dass auf die Ebene nur solche Flächen abgebildet werden können unter Erhaltung der Längen und Winkel, die ebenfalls verschwindende Gaussische Krümmung haben.

Wir beweisen also zunächst, dass die Ebene verschwindende Gaussische Krümmung hat. Es sind die Hauptkrümmungen, aus denen die Gaussische Krümmung zusammengesetzt ist, die von geraden Linien; die verschwinden aber, also ist auch  $K = 0$  für die Ebene.

Nun beweisen wir das theorema egregium.

Es ist

$$(1) \quad K = \frac{L N - M^2}{E G - F^2} .$$

Den Nenner können wir von vornherein ausser Betracht lassen, weil er in der Tat nur von  $E, F$  und  $G$  abhängt. Wir haben also nur noch den Zähler zu untersuchen. Es

ist nun

$$(2) \quad L = \frac{\sum \gamma_{uu}}{|\gamma_{uu} \times \gamma_{vv}|} \gamma_{uu}$$

$$= \frac{1}{|\gamma_{uu} \times \gamma_{vv}|} (\gamma_{uu}, \gamma_{vv}, \gamma_{uu}),$$

$$(3) \quad M = \frac{1}{|\gamma_{uu} \times \gamma_{vv}|} (\gamma_{uu}, \gamma_{vv}, \gamma_{vv}),$$

$$(4) \quad N = \frac{1}{|\gamma_{uu} \times \gamma_{vv}|} (\gamma_{uu}, \gamma_{vv}, \gamma_{uv}).$$

Wegen

$$(5) \quad |\gamma_{uu} \times \gamma_{vv}| = \sqrt{EG - F^2}$$

haben wir also nur noch die Determinante zu untersuchen, d.h. den Ausdruck

$$(6) \quad \Delta = (\gamma_{uu}, \gamma_{vv}, \gamma_{uu})(\gamma_{uu}, \gamma_{vv}, \gamma_{vv}) - (\gamma_{uu}, \gamma_{vv}, \gamma_{uv})^2,$$

und von ihm zu zeigen, dass er nur von den Grössen  $E, F, G$  (und ihren Ableitungen) abhängt. Es handelt es sich um zwei Determinantenprodukte. Es ist nun allgemein<sup>1)</sup>

$$(7) \quad (a, b, c)(a, f, g) = \begin{vmatrix} aa & af & ag \\ ba & bf & bg \\ ca & cf & cg \end{vmatrix}$$

Beweis: Es ist

$$(a, b, c)(a, f, g) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & f_1 & g_1 \\ a_2 & f_2 & g_2 \\ a_3 & f_3 & g_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 + a_2 c_3 & a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 & a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 & b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3 \\ c_1 c_1 + c_2 c_2 + c_3 c_3 & c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 & c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} aa & af & ag \\ ba & bf & bg \\ ca & cf & cg \end{vmatrix}.$$

Nach dieser Formel berechnen wir die Determinante in (6) um. Wir erhalten

$$(8) \quad \Delta = \begin{vmatrix} g_{11}^2 & g_{11}g_{12} & g_{11}g_{22} \\ g_{11}g_{12} & g_{12}^2 & g_{12}g_{22} \\ g_{11}g_{22} & g_{12}g_{22} & g_{22}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11}^2 & g_{11}g_{12} & g_{11}g_{22} \\ g_{12}g_{12} & g_{12}^2 & g_{12}g_{22} \\ g_{12}g_{22} & g_{12}g_{22} & g_{22}^2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} E & F & \underline{g_{11}g_{22}} \\ F & G & \underline{g_{12}g_{22}} \\ \underline{g_{11}g_{22}} & \underline{g_{12}g_{22}} & g_{22}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F & \underline{g_{11}g_{22}} \\ F & G & \underline{g_{12}g_{22}} \\ \underline{g_{12}g_{22}} & \underline{g_{12}g_{22}} & g_{22}^2 \end{vmatrix}$$

Es ist nun

$$(9) \quad g_{11}g_{22} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u} g_{11}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} E = \frac{1}{2} E_u,$$

$$(10) \quad g_{12}g_{22} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial v} g_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} E = \frac{1}{2} E_v,$$

$$(11) \quad g_{11}g_{22} = (g_{11}g_{22})_v = g_{11v}g_{22} = F_v - \frac{1}{2}(g_{22}^2)_v = F_v - \frac{1}{2} G_{2v}$$

und ganz entsprechend folgt durch Vertauschung von  $u$  und  $v$  und von  $E$  und  $G$

$$(12) \quad g_{12}g_{22} = \frac{1}{2} G_v,$$

$$(13) \quad g_{11}g_{22} = \frac{1}{2} G_u,$$

$$(14) \quad g_{12}g_{22} = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

Damit sind die unterstrichenen Glieder der Determinante in der Tat auf  $E, F, G$  zurückgeführt. Es bleiben nun noch die beiden Ausdrücke  $g_{11}g_{22}$  und  $g_{12}^2$  übrig. Die hängen nun einzeln nicht allein von  $E, F$  und  $G$  ab, wohl aber die bei uns auftretende Differenz. Es ist

$$(15) \quad (g_{11}g_{22})_v = g_{11v}g_{22} + g_{11}g_{22v} = F_v - \frac{1}{2} E_{vv}$$

und

$$(16) \quad (g_{12}g_{22})_u = g_{12u}g_{22} + g_{12}g_{22u} = \frac{1}{2} G_{2u}.$$

Subtrahieren wir, so folgt

$$(17) \quad g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2 = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

Wir denken nun die beiden Determinanten in (8) nach der letzten Spalte entwickelt. Dann erhalten wir

$$(18) \quad \Delta = A(E, F, G) + (g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2) \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

und da die Differenz  $g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2$  nach (17) nur von E, F, G abhängt

$$(19) \quad \Delta = B(E, F, G).$$

So erhalten wir schliesslich für die Gauss'sche Krümmung die Formel

$$(20) \quad (EG - F^2)^2 K = \begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F & G & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v & -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_v \\ F & G & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Ableitung ist von R. Batzer gegeben worden. Gauss selbst ist 1826n durch sehr labgwierige Rechnungen zu einer gleichwertigen Formel gekommen.

Wir sehen, dass in diesen Formeln höhere als zweite Ableitungen der Grössen E, F, G nicht auftreten. Wenn man spezielle Koordinatensysteme einführt, z. B. Orthogonalsysteme, dann vereinfachen sich die Formeln wesentlich. Es wird dann, je  $F = 0$ , weitere Vereinfachungen werden wir später noch kennenlernen.

Damit ist unser Problem, Messungen auf Flächen zu machen, in negativem Sinne gefördert. Wir haben gesehen, dass wir nicht einfach die ~~Krümmung~~ Flächen auf Ebenen abbilden können. Aber so ganz aussichtslos ist die Angelegenheit doch nicht. In der engen Umgebung eines Punktes lassen sich sehr wohl Längen und Winkel mit denen auf der Ebene vergleichen. Es ergeben sich Ausdrücke, die auf der Fläche und der Tangentialebene die gleichen sind. Und die Abweichungen der Flächengrössen von denen auf der Ebene merkt man erst dann, wenn man die zweiten Ableitungen hinzunimmt.

Der Flächenvektor sei  $\xi$ , der der Tangentialebene sei  $\xi'$ . Beide seien auf ein Parameternetz  $u, v$  bezogen. Wir betrachten die beiden Vektoren an der Stelle  $u = v = 0$ .

Dann können wir es so einrichten, dass, wenn wir  $\xi$  und  $\eta$  in Mac Laurinsche Reihen entwickeln, die ersten Glieder übereinstimmen, während in den quadratischen Gliedern  $\delta$  Abweichungen auftreten. So kann man also in erster Annäherung Längen und Winkel der Fläche mit denen der Tangentialebene vergleichen. Wir können also die Fläche orthogonal auf die  $\xi$  Tangentialebene projizieren und bekommen dieselben Längen und Winkel. Diese Analogie kann man noch einen Schritt weiter treiben. Wir können noch einen Nachbarpunkt hinzunehmen und ihn auf dieselbe Tangentialebene projizieren. Dann bekommen wir noch Gebilde, die sich auf Fläche und Tangentialebene in erster Näherung nicht unterscheiden. Aber zu einem zweiten Nachbarpunkte kann man nicht mehr übergehen, denn in demselben Augenblicke müssen wir Torsionsbetrachtungen machen und die zweiten Ableitungen hinzuziehen. Und da durch die zweiten, ersten Ableitungen und  $\xi$  selbst die Gaussische Krümmung bestimmt ist, und da weiter die Gaussische Krümmung auf der Fläche eine andere ist als auf der Ebene, ist dann keine Uebereinstimmung mehr möglich.

#### §57: Die geodätische Krümmung.

Die geodätische Krümmung  $\frac{1}{R}$  soll ein Analogon zur ebenen Krümmung  $\frac{1}{r}$  sein, ein Ausdruck, der nur von  $E, F, G$  und ihren Ableitungen abhängt.

Wir betrachten eine Fläche und eine Kurve auf ihr und versuchen, den Winkel benachbarter Tangenten durch den Abstand ihrer Fußpunkte zu dividieren, um so die Krümmung zu bekommen. Um nun etwas zu erhalten, das nur von  $E, F, G$  abhängt, gehen wir so vor:

Wir nehmen die Tangentialebene in  $P$ . Dann liegt die Tangente in  $P$  an die Kurve in dieser Ebene. Nun betrachten wir einen Nachbarpunkt auf der Kurve und projizieren auch seine Tangente in die Tangentialebene von  $P$ . Dann erhalten wir zwei Einheitsvektoren in der Tangentialebene, die einen gewissen kleinen Winkel einschließen. Lassen wir den zweiten Vektor gegen den ersten heranrücken, so konvergieren Winkel und Abstand gegen Null. Den Quotienten aus beiden nennen wir die geodätische Krümmung. Wir definieren also:

Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve ist gleich der gewöhnlichen Krümmung ihres Normalrisses auf die Tangentialebene.

Es ist zunächst klar, dass, wenn die Fläche zufällig eine Ebene ist, die geodätische Krümmung in die gewöhnliche übergeht, denn dann ist die Projektion mit der Kurve selbst

identisch.

Das zweite dagegen, dass die geodätische Krümmung nur von  $E, F, G$  abhängt, ist nicht von vorneherin klar. Wir haben ja einen gewissen Fehler gemacht, indem wir die Tangente in dem Nachbarpunkte und ihr Bild auf der Tangentialebene des ersten Punktes gleichsetzten. Dass durch diesen Fehler die zweite Fundamentalform herausgeworfen wurde und nun die geodätische Krümmung nur von der ersten abhängt, ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Das wollen wir jetzt beweisen.

Auf unserer Fläche sei eine Kurve

$$(1) \quad \gamma = \gamma(u)$$

gegeben. Dann ist die Krümmung dieser Kurve

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} = |\gamma''|.$$

Wenn wir auf die Tangentialebene projizieren, müssen wir  $\gamma''$  in zwei Komponenten senkrecht und parallel zur Tangentialebene zerlegen:

$$(3) \quad \gamma'' = \alpha \xi + \beta \gamma' \times \xi.$$

Das vektorielle Produkt ist gerechtfertigt, weil  $\xi$  ein Einheitsvektor ist und daher <sup>senkrecht</sup> auf  $\gamma'$  senkrecht steht. Das vektorielle Produkt ist also in der Tat ein Vektor, der in der Tangentialebene liegt. Für uns von Interesse ist die Zahl  $\beta$ . Es ist nämlich

$$(4) \quad \beta = \frac{1}{\rho \eta}.$$

Multiplizieren wir (3) mit dem Einheitsvektor  $\gamma' \times \xi$ ; so folgt, da  $\xi$  auf  $\gamma' \times \xi$  senkrecht steht

$$\beta = \xi \times \gamma' \cdot \gamma'' = (\xi, \gamma', \gamma''),$$

oder, um Vorzeichenschwierigkeiten aus dem Wege zu gehen

$$(5) \quad \frac{1}{\rho \eta} = \beta = |(\xi, \gamma', \gamma'')|$$

Wir haben also zu zeigen, dass die Determinante  $(\xi, \gamma', \gamma'')$  eine Funktion von  $E, F, G$  allein ist. Da gehen wir so vor: Die geodätische Krümmung hängt sicher nicht von der Wahl der Parameter  $u, v$  ab. In der Definition kommt ja von einem Parameter gar nichts vor. Es ist also erlaubt, spezielle Parameter einzuführen. Wir nehmen an, die Kurve  $\gamma$

sei eine Kurve  $v = \text{const.}$  Ferner wollen wir annehmen, dass das Parameternetz so gewählt ist, dass  $f_u$  senkrecht zu  $f_v$  ist, dass also

$$(6) \quad f_u f_v = 0$$

ist. Es wird nun

$$(7) \quad f_v = f_u \frac{du}{ds}$$

Ferner ist

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

also

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{E}$$

oder

$$(8) \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}$$

Setzen wir (8) in (7) ein, so wird

$$(9) \quad f_v = f_u \frac{1}{\sqrt{E}}$$

und ferner

$$(10) \quad f_{vv} = (f_u)_v \frac{1}{\sqrt{E}} + f_u \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \right)_v$$

Da es uns nur auf die Bildung der Determinante ankommt, können wir den zweiten Term auf der rechten Seite von (10) fortlassen wegen (9) und erhalten

$$(11) \quad f_{vv} = f_{uv} \frac{1}{\sqrt{E}} + \dots$$

Dann wird also

$$(12) \quad \frac{1}{f_g} = \left( \frac{1}{E}, f_u, f_{uv} \right) \frac{1}{\sqrt{E}^3}$$

Wir haben also nun nachzuweisen, dass die Determinante  $\left( \frac{1}{E}, f_u, f_{uv} \right)$  eine Funktion von  $E, F, G$  allein ist. Zu dem Zwecke benutzen wir die Hilfsformel

$$(13) \quad (a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c).$$



Beweis:

1.) Es sei

$$a \times b = 0$$

Dann muss einer der beiden Fälle eintreten

a.) entweder  $a = 0$  oder  $b = 0$ , Also verschwindet die rechte Seite.

b.)  $a$  und  $b$  haben dieselbe Richtung. Dann können wir setzen  $b = \lambda a$  und erhalten

$$0 = \lambda(a \times b)(a \cdot b) - \lambda(a \cdot b)(a \times b).$$

2.) Es sei

$$a \times b \neq 0$$

und auch

$$c \times d \neq 0.$$

Dann führen wir die Vektoren

$$\xi = \frac{a \times b}{|a \times b|}$$

$$\eta = \frac{c \times d}{|c \times d|}$$

ein. Das können wir, weil wir vorausgesetzt haben, dass die Nenner nicht verschwinden. Wir betrachten den Ausdruck

$$(a, b, \xi)(c, d, \eta).$$

Da  $\xi$  ein Einheitsvektor ist, stimmen die beiden Determinanten mit den Ausdrücken  $a \times b$  und  $c \times d$  überein bis auf die Richtung. Wir haben also noch mit dem Cosinus des Neigungswinkels zu multiplizieren und erhalten

$$(a \times b)(c \times d) = (a, b, \xi)(c, d, \eta)(\xi \eta)$$

Das skalare Produkt  $\xi \eta$  ist ja mit dem Cosinus des Neigungswinkels identisch, da  $\xi$  und  $\eta$  Einheitsvektoren sind. Dann wird

$$(a \times b)(c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d & a \cdot \eta \\ b \cdot c & b \cdot d & b \cdot \eta \\ \xi \cdot c & \xi \cdot d & \xi \cdot \eta \end{vmatrix}$$

Der Ausdruck, der herauskommen soll, steht in der Unterdeterminante oben links. Wir müssen also versuchen, die Determinante so umzuformen, dass nur diese Unterdeterminante übrigbleibt. Wir nehmen das skalare Produkt in die Determinante hinein:

$$(a \times b)(c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d & a \cdot \eta \\ b \cdot c & b \cdot d & b \cdot \eta \\ (\xi \cdot c)(\xi \cdot c) & (\xi \cdot c)(\xi \cdot d) & (\xi \cdot c)(\xi \cdot \eta) \end{vmatrix}$$

und können nun, da  $a$  und  $b$  nicht parallel vorausgesetzt sind,  $\eta$  linear aus  $a$  und  $b$  und  $\xi$  kombinieren:

$$\eta = \alpha a + \beta b + \gamma \xi.$$

Multiplizieren wir mit  $\xi$ , so wird

$$\eta \xi - \gamma \xi^2 = \gamma.$$

Wir multiplizieren nun die erste Zeile der Determinante mit  $\alpha$ , die zweite mit  $\beta$  und addieren sie zur ersten. Dann erhalten wir unter Benutzung von  $\gamma = \eta \xi$

$$(\alpha \times \beta)(\alpha \times \gamma) = \begin{vmatrix} \alpha \sigma & \alpha \delta & \alpha \eta \\ \beta \sigma & \beta \delta & \beta \eta \\ (\alpha \sigma + \beta \sigma) \xi & (\alpha \delta + \beta \delta) \xi & (\alpha \eta + \beta \eta) \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \sigma & \alpha \delta & \alpha \eta \\ \beta \sigma & \beta \delta & \beta \eta \\ \gamma \sigma & \gamma \delta & \gamma \xi \end{vmatrix}$$

Nun ist aber nach Definition  $\eta$  senkrecht zu  $\sigma$  und  $\delta$ . Also ist

$$\eta \sigma = \eta \delta = 0$$

Entwickeln wir die Determinante nach der letzten Zeile, so wird also

$$(\alpha \times \beta)(\alpha \times \gamma) = (\alpha \sigma)(\beta \delta) - (\beta \sigma)(\alpha \delta)$$

q. e. d.

Es ist nun

$$(\xi, \gamma_u, \gamma_{uu}) = \xi(\gamma_u \times \gamma_{uu}),$$

oder, da  $F = 0$  und infolgedessen  $\xi = \frac{\gamma_u \times \gamma_v}{\sqrt{EG}}$  ist,

$$(14) \quad (\xi, \gamma_u, \gamma_{uu}) = \frac{1}{\sqrt{EG}} (\gamma_u \times \gamma_v)(\gamma_u \times \gamma_{uu}).$$

Dann wird nach (13)

$$(\xi, \gamma_u, \gamma_{uu}) = \frac{1}{\sqrt{EG}} (\gamma_u^2 (\gamma_v \gamma_{uu}) - (\gamma_u \gamma_{uu})(\gamma_u \gamma_v)),$$

oder wegen (6)

$$(15) \quad (\xi, \gamma_u, \gamma_{uu}) = \frac{1}{\sqrt{EG}} E(\gamma_v \gamma_{uu})$$

Nun ist

$$0 = (\gamma_u \gamma_v)_u = \gamma_v \gamma_{uu} + \gamma_u \gamma_{uv}.$$

Also wird

$$(16) \quad \gamma_v \gamma_{uu} = -\gamma_u \gamma_{uv} = -\frac{1}{2} E_v.$$

Setzen wir (16) in (15) ein, so folgt

$$(17) \quad (\xi, \gamma_u, \gamma_{uu}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{EG}} E E_v,$$

und es wird nach (12)

$$(18) \quad \frac{1}{\rho_g} = \left| \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \right|.$$

Wir müssen zu Beträgen übergehen, weil wir über das Vorzeichen von  $E_v$  nicht orientiert sind. Diese Gleichung (18) schreiben wir in etwas anderer Form. Wir setzen

$$(19) \quad E = A^2, \quad G = B^2$$

Das ist erlaubt, da  $E$  und  $G$  positiv sind. Man setzt also,

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2$$

Dann wird

$$E_v = 2A dv$$

und (18) geht über in

$$\frac{1}{\rho_g} = \left| \frac{A_v}{2AB} \right|.$$

Kehren wir wieder zu der Gleichung (5) zurück. Zunächst folgt daraus, dass, wenn zwei Flächen sich längs einer Kurve berühren, diese Kurve in beiden Flächen dieselbe geodätische Krümmung hat. Da die beiden Flächen sich berühren, ist  $\xi$  für sie derselbe Vektor. Der Ausdruck hängt dann also nur noch von  $\gamma_1$  und  $\gamma_{22}$  ab, diese beiden Vektoren spannen aber die Schmiegenebene der Kurve auf, und die ist natürlich dieselbe.

Gleichzeitig ist damit bewiesen, dass unsere frühere Definition der geodätischen Linie mit der neuen zusammenfällt. Wir haben jetzt die geodätische Linie charakterisiert durch das Verschwinden der Determinante  $(\xi, \gamma_1, \gamma_{22})$ . Wegen

$$(19) \quad (\xi, \gamma_1, \gamma_{22}) = \xi(\gamma_1 \times \gamma_{22})$$

besagt also unsere neue Definition, dass  $\xi$  senkrecht zum Binormalenvektor stehen muss, also Hauptnormale ist, und das ist genau unsere frühere Definition der geodätischen Linie.

Durch die Gleichung (5) können wir auch sofort die geodätische Krümmung zur geodätischen Linie in Beziehung setzen. Es ist, wenn  $\xi_3$  der Einheitsvektor in der Richtung der Binormalen ist

$$(20) \quad \gamma_1 \times \gamma_{22} = \xi_3 / |\gamma_1 \times \gamma_{22}| = \xi_3 \sqrt{(\gamma_1 \times \gamma_{22})^2}.$$

Nun ist, wie wir schon früher bewiesen haben,

$$(a \times b)^2 = a^2 b^2 - (ab)^2$$

also wird nach (19)

$$g_2 \times g_{22} = g_3 \sqrt{g_2^2 g_{22}^2 - (g_2 g_{22})^2},$$

oder, da  $g_2$  Einheitsvektor ist

$$g_2 \times g_{22} = g_3 \sqrt{g_{22}}$$

oder wegen (2)

$$(21) \quad g_2 \times g_{22} = g_3 \frac{1}{f}.$$

Multiplizieren wir mit  $g_3$ , so wird wegen (5) und (19)

$$(22) \quad \frac{1}{f_g} = (g_3 \cdot g_3) \frac{1}{f}$$

oder, da  $g_3$  und  $g_3$  Einheitsvektoren sind, und wenn wir den Winkel zwischen Binormale und Flächennormale mit  $\alpha$  bezeichnen

$$(23) \quad \frac{1}{f_g} = \frac{1}{f} \cos \alpha.$$

Das ist ein Analogon zum Satze von Meusnier. Diese Formel hat etwas sehr Plausibles. Wenn wir nämlich eine Strecke projizieren, so multipliziert sich ihre Länge mit dem Cosinus des Neigungswinkels. Es verhält sich also die Krümmung wie eine Strecke.

-----  
 Unsere Ableitungen haben in einem Punkte etwas Unbefriedigendes. Wir haben ein ganz spezielles Koordinatensystem eingeführt. Die Gleichung (18) ergab sich nur unter der Voraussetzung, dass die zu vermessende Kurve eine Kurve  $v=c$  war und dass  $u, v$  ein Orthogonalsystem war. Wir wollen hier kurz angeben, wie der ganz allgemeine Ausdruck ohne derartige Spezialisierungen zustandekommt. Wir gehen aus von der Gleichung (5). Die enthielt noch nicht die Voraussetzungen. Es ist allgemein

$$(24) \quad g_2 = g_{2u} u' + g_{2v} v',$$

also

$$(25) \quad \begin{aligned} g_{22} &= g_{2u} u' + g_{2v} v' + g_{2u} u'' + g_{2v} v'' \\ &= g_{2uu} u'^2 + 2g_{2uv} u'v' + g_{2vv} v'^2 + g_{2uu} u'' + g_{2vv} v''. \end{aligned}$$



definiert. Wir werden also noch zu zeigen haben, dass diese beiden Definitionen übereinstimmen.

### §58: Geodätische Linien.

Unser Ziel wird sein, die Struktur der Gesamtheit der geodätischen Linien im Kleinen zu vergleichen mit der Gesamtheit der geraden Linien in der Ebene und zu untersuchen, was auf beliebigen Flächen den Geraden analog ist. Da wird ein wichtiges Ziel sein, zu untersuchen, ob man durch Vermessen auf den geodätischen Linien allein die Gaussische Krümmung der Fläche ermitteln kann. Das werden wir später untersuchen. Zunächst aber müssen wir die geodätischen Linien selbst untersuchen. Sie waren definiert durch die Gleichung

$$(1) \quad \frac{1}{f_3} = (\xi, \gamma, \gamma_{33}) = 0.$$

Wir wollen nun zunächst von der Bogenlänge  $s$  zu einem beliebigen Parameter  $t$  übergehen. Es wird

$$(2) \quad \gamma_{33} = \gamma_{tt} \frac{dt}{ds}$$

und

$$(3) \quad \gamma_{33} = \gamma_{tt} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \gamma_{tt} \frac{d^2t}{ds^2}.$$

Setzen wir (2) und (3) in (1) ein, so wird

$$\frac{1}{f_3} = (\xi, \gamma_{tt}, \gamma_{tt}) \frac{1}{\left( \frac{dt}{ds} \right)^3};$$

also wird nun die Gleichung der geodätischen Linie

$$(4) \quad (\xi, \gamma_{tt}, \gamma_{tt}) = 0.$$

Bisher haben wir uns nur dafür interessiert, dass diese Determinante eine innere Größe der Fläche sei, dass sie also nur von  $E, F, G$  abhängt. Jetzt wollen wir die geodätische Linie wirklich bestimmen. Wir führen ein Parameternetz  $u, v$  ein. Dann wird es wichtig sein, die Abhängigkeit der Determinante von  $u'$  und  $v'$  zu untersuchen.

Wir betrachten ein Stück der  $uv$ -Ebene. Dann ist

$$(5) \quad \gamma_{tt} = \gamma_{uu} u'^2 + \gamma_{vv} v'^2.$$

Wir vereinfachen die Rechnung nun dadurch, dass wir  $v=t$  setzen. Wir setzen dann

$$(6) \quad u' = \frac{du}{dv}$$

Das können wir, wenn wir die Richtungen ausschliessen, die auf den Linien  $u = \text{const}$  senkrecht stehen. Dann wird nach [57 (26)

$$(6) \quad \frac{d}{ds} = (\xi, \gamma_u u' + \gamma_v, \gamma_u u'' + \gamma_{uu} u'^2 + 2\gamma_{uv} u' + \gamma_{vv}) = 0$$

Das ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $u$  als Funktion von  $v$ . Bei einer solchen Differentialgleichung ist wesentlich, zu wissen, mit welchem Faktor die höchste Ableitung, also  $u''$ , vorkommt. Die anderen Grössen sind dann nicht wesentlich. Es ergibt sich

$$(7) \quad (\xi, \gamma_v, \gamma_u) u'' + P(u', u, v) = 0$$

Es ist nun

$$(8) \quad (\xi, \gamma_v, \gamma_u) = \xi(\gamma_v \times \gamma_u) = -\xi(\gamma_u \times \gamma_v) = -\frac{\gamma_u \times \gamma_v}{|\gamma_u \times \gamma_v|} \gamma_u \times \gamma_v \\ = |\gamma_u \times \gamma_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

sodass aus (7) wird

$$(9) \quad \sqrt{EG - F^2} u'' + P(u', u, v) = 0$$

Es führt also die Bestimmung der geodätischen Linie an einer Stelle, wo das Linienelement allen unseren Anforderungen genügt, auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $u$  als Funktion von  $v$ . Um zu wissen, wieviel geodätische Linien es gibt, haben wir also zu untersuchen, wieviel Lösungen eine solche Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzt. Wir wollen diese Theorie hier nicht durchführen, sondern nur den wichtigsten Satz daraus anführen:

Wenn wir in einem Punkte den Wert von  $u$  und von  $u'$  vorgeben, dann gibt es eine und nur eine Lösung der Differentialgleichung, die in dem betrachteten Punkte den richtigen Wert annimmt.

Aus diesem Satze folgt, dass die geodätischen Linien sich ähnlich verhalten wie die Geraden in der Ebene. Wenn wir also <sup>einen</sup> ~~zwei~~ Punkte vorgeben und die Richtung der geodätischen Linie in ihm, so ist durch diese Vorgaben die geodätische Linie im Kleinen bestimmt. Andererseits wissen wir aus dem Satze aber auch, dass in jeder Richtung eine geodätische Linie ausgehen muss.

Dieser Tatbestand genügt uns aber noch nicht. Wir brauchen den Satz, dass durch zwei hinreichend benachbarte Punkte

eine und nur eine geodätische Linie hindurchgeht, dass also auch das Analogon zu dem Satze, dass durch zwei Punkte eine und nur eine Gerade hindurchgeht, erfüllt ist. Wir wollen uns diese Verhältnisse etwa am Beispiel der Kugel klar machen. Wir behaupten, dass die geodätischen Linien auf der Kugel <sup>allein</sup> die Grosskreise sind. Zunächst ist klar, dass die Grosskreise solche sind, denn die die Hauptnormale eines jeden Grosskreises ist auch Kugelnormale. Wir haben also nur noch zu beweisen, dass ausser den Grosskreisen weiter keine geodätischen Linien vorhanden sind. Das folgt aber sofort. Angenommen, es gäbe durch ~~dem~~ einen Punkt eine geodätische Linie, die nicht Grosskreis wäre. Dann würden, da ja der durch den Punkt gehende Grosskreis auch geodätische Linie ist, zwei geodätische Linien durch einen Punkt gehen. Das ist aber nach dem oben angegebenen Satze nur möglich, wenn die beiden Linien in der Umgebung des Punktes identisch sind. Es geht nun durch zwei Punkte der Kugel im allgemeinen ein und nur ein Grosskreis, wenn wir nicht gerade zwei diametral gegenüber gelegene Punkte betrachten. Wenn wir uns also auf ein hinreichend kleines Stück der Kugeloberfläche beschränken, so geht tatsächlich durch zwei Punkte eine und nur eine geodätische Linie.

Diese bei der Kugel bewiesene Tatsache wollen wir nun allgemein beweisen. Wir haben also die Änderung zu untersuchen, welche die Lösung erleidet, wenn wir die Vorgaben in dem einen der betrachteten Punkte ändern. Um das zu können, brauchen wir einen tieferen Satz, dass nämlich die Änderung nach den Vorgaben differenzierbar ist. Ist dieser Satz erfüllt, so lassen sich die Lösungen in der Form

$$u = u(u_0, v_0, u'_0, v)$$

darstellen, wenn im Punkte  $v_0$  die Grössen  $u_0$  und  $u'_0$  vorgegeben sind. Wir setzen also voraus, dass diese Funktion nach den Vorgaben differenzierbar ist. Dann haben wir also den Satz zu beweisen:

Zwei von einem Punkte ausgehende geodätische Linien schneiden sich in einer gewissen Umgebung dieses Punktes NICHT.

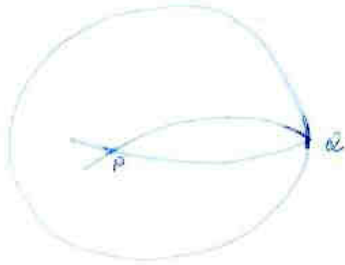
Aus (9) folgt

$$(10) \quad u'' = P(u, v, u'),$$

wobei die beiden Funktionen  $P$  nicht dieselben sind. In dem Bereich, den wir betrachten, ist die Funktion  $P$  jedenfalls beschränkt. Es ist also auch  $u''$  beschränkt.



Es ist also die Krümmung stetig und nicht sehr gross. Wenn nun die Krümmung unter einer festen Schranke bleibt, so weicht die Kurve nicht sehr von der Geraden ab. Daraus folgt, dass, wenn wir um den betrachteten Pkt eine geschlossene Kurve herumlegen, die ein nicht zu grosses Gebiet umgrenzt



Figur .

es einen ersten Austrittspunkt der geodätischen Linie aus diesem Bereich gibt. Wir nehmen nun an, unsere Behauptung, dass sich zwei geodätische Linien in hinreichender Nähe des betrachteten Pktes nicht schneiden, sei falsch.

Dann gibt es also einen Punkt Q, in dem zwei geodätische Linien sich schneiden. Dann können wir annehmen, dass die beiden geodätischen Linien sich in Q zum ersten Male schneiden.

Dann legen wir durch Q eine Kurve, die den Punkt P umschliesst, und betrachten für jede geodätische Linie, die von P ausgeht, den Durchstoßpunkt durch diese Kurve. (Q') Dann heisst unsere Frage: Wie ändert sich Q', wenn wir die Anfangsbedingung der geodätischen Linie ändern?

Unsere Behauptung lautet: Unter den Annahmen, die wir machen, ist diese Abhängigkeit monoton. Es kommt nicht vor, dass der Punkt Q' auf der geschlossenen Kurve umkehrt.

Wenn das bewiesen ist, sind wir fertig; ist nämlich die Abhängigkeit monoton, so folgt daraus, dass sie eindeutig ist, und das würde im Widerspruch stehen zu der Annahme stehen, dass sich in einem Punkte Q auf der Kurve zwei Linien schneiden; denn die geodätischen Linien, die sich dort schneiden, haben ja verschiedene Anfangsbedingungen, sie laufen ja in verschiedenen Richtungen durch P. Damit ist also der Schlichtheitsatz zurückgeführt auf den Monotonitätssatz. Auch diesen Satz wollen wir hoch vereinfachen.

Wir haben die Lösungskurve in der Abhängigkeit von  $u'$  in P zu untersuchen. Wir setzen nun an der Stelle  $u=0$

$$(10) \quad u'_0 = \alpha,$$

und unsere Frage lautet nun: Wie hängt  $u$  von  $\alpha$  ab? Wir haben nun einen geschlossenen Kurvenzug um den Punkt P gelegt. Statt dessen wählen wir nun eine Gerade  $v = \text{const} = c$ . Wenn es uns gelingt, nachzuweisen, dass die Abhängigkeit der Funktion  $u$  von  $\alpha$  auf dieser Geraden

monoton ist, sind wir fertig, denn wegen der Willkür der Orientierung des Koordinatensystems können wir aus solchen Strecken einen Polygonenzug um den Punkt  $P$  zusammensetzen. Wir haben also nur noch zu beweisen, dass  $u(v)$  auf  $v = c$  monoton von  $\alpha$  abhängt. Es ist nun  $u$  eine Funktion von  $v$  und  $\alpha$  allein

$$(11) \quad u = u(v, \alpha),$$

und wir haben vorausgesetzt, dass  $u$  nach  $\alpha$  differenzierbar sei. Wir setzen nun

$$(12) \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = z$$

und betrachten  $z$  in Abhängigkeit von  $v$ . Dann haben wir die Bestimmungsgleichung (10) in eine solche für  $z$  umzuformen. Zu dem Zwecke differenzieren wir (10) nach  $\alpha$  und erhalten, da  $v$  von  $\alpha$  unabhängig ist

$$(13) \quad \frac{\partial u''}{\partial \alpha} = P_u \frac{\partial u}{\partial \alpha} + P_{u'} \frac{\partial u'}{\partial \alpha} = z''$$

Die Änderung mit  $\alpha$  genügt also einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Wir haben nun die Anfangswerte von  $z$  zu untersuchen. In  $P$  ist  $u = 0$ , also auch  $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$ . Also ist

$$(14) \quad z_0 = 0$$

Ferner ist

$$z'_0 = \left( \frac{\partial u'}{\partial \alpha} \right)_0$$

oder wegen  $u'_0 = \alpha$

$$(15) \quad z'_0 = 1.$$

Aus (15) folgt nun, dass  $z$ , wenn wir es als Funktion von  $v$  auftragen, unter einer Steigung von  $45^\circ$  durch  $P$  hindurchgeht. Betrachten wir nun die Gleichung (13).  $P_u$  und  $P_{u'}$  sind beschränkt, also auch  $z''$ , d. h. die Krümmung der Kurve. Wir haben es also mit einer Kurve zu tun, die unter einer Steigung von  $45^\circ$  durch  $P$  geht und die beschränkte Krümmung hat. Eine solche Kurve kann aber die  $v$ -Achse nicht zu früh wieder schneiden. Wir wissen also, dass  $z$  für hinreichend kleine  $v$  nicht verschwindet. Dann folgt aber aus der Definition von  $z$  in (12), dass  $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$  für hinreichend kleine  $v$  nicht verschwindet. Es ist nun für  $v = 0$   $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$  und

die Steigung positiv. Also folgt, dass auch für  $v = \varepsilon$  bei hinreichend kleinem  $\varepsilon$   $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$  positiv ist. Das heisst aber, dass die Abhängigkeit der Funktion  $u$  von  $\alpha$  monoton ist.

Man kann auch so schliessen:

Wenn die Kurve zum zweiten Male  $u=0$  schneiden würde, dann müsste sie da sie in positiver Steigung durch den Nullpunkt geht, vorher ein Extremum besitzen. Dort müsste  $z'$  verschwinden. Im Nullpunkte ist  $z' = 1$ . Aus der Steigkeit von  $z'$  folgt dann aber, dass auch in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes immer noch  $z'$  grösser als Null bleibt.

Wir wollen nun noch einen sehr ähnlichen Satz beweisen, der für die Anwendung von Nutzen sein wird:

Zwei von verschiedenen Punkten einer Kurve, die nicht geodätische Kurve ist, unter vorgegebenen Richtungen austretende geodätische Linien schneiden sich in hinreichend kleiner Umgebung nicht.

Zum Beweise überdecken wir die Fläche mit einem Parameternetz  $u, v$ , wobei wir die betrachtete Kurve als ~~zirk~~ <sup>die</sup> Kurve  $v = \varepsilon x x x$  nehmen wollen. Ferner können wir, da wir vorausgesetzt haben, dass die Kurve  $v = 0$  keine geodätische Linie ist, dass sie also mit den geodätischen Linien einen von Null verschiedenen Winkel einschliesst, die ausstrahlenden geodätischen Linien als Kurven  $u = \text{const}$  auffassen.

Wir fangen nun die geodätischen Linien auf einer Kurve  $v = \varepsilon$  auf. Die Schnittpunkte seien  $Q$ . Dann heisst unsere Behauptung, dass, wenn nur  $\varepsilon$  hinreichend klein ist,  $Q$  mit  $u_0$  monoton variiert. Wir setzen

$$(16) \quad u_0 = \beta, \quad u'_0 = 0.$$

Wir betrachten nun  $u_0$  als Funktion von  $\beta$  und behaupten, dass diese Abhängigkeit in hinreichender Nähe monoton ist. Die Differentialgleichung ist genau dieselbe wie früher, nur wird  $\alpha$  durch  $\beta$  ersetzt. Nur werden die Vorgaben jetzt anders. Wir setzen

$$(17) \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = z^*$$

Dann genügt  $z^*$  der angegebenen Gleichung (13) für  $z$ . Nur heissen jetzt die Vorgaben

$$(18) \quad z^*_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)_0 = 1$$

Ferner ist

$$z_0^{*'} = \left( \frac{\partial u'}{\partial z_0} \right)$$

und wegen  $u_0' = 0$

$$(19) \quad z_0^{*'} = 0$$

Es läuft also in der  $zv$ -Ebene die Kurve horizontal durch die Kurve  $v = 0$  hindurch, aber wegen  $z_0^{*'} = 1$  in hinreichend grosser Höhe; sie kann also die Kurve  $u = 0$  nicht zu schnell erreichen. Dieser Fall ist viel plausibler als der vorige, denn wenn zwei Linien in grosser Entfernung parallel auslaufen, dann schneiden sie sich nicht zu bald. Wenn sie dagegen von einem Punkte ausgehen, dann ist das gar nicht so einsichtlich, wenn man Krümmungsbetrachtungen vermeiden will.

-----

Nachdem wir nun gesehen haben, dass die geodätische Linie durch zwei in hinreichend enger Nachbarschaft befindliche Punkte eindeutig bestimmt ist, können wir nun die geodätischen Linien heranziehen, um Kurvennetze aus ihnen aufzubauen. Wir können ein Parameternetz  $u, v$  so gewählt denken, dass die Linien  $u = \text{const}$  aus geodätischen Linien bestehen. Dann kann man in einem kleinen Gebiete die Fläche schlicht mit solchem Netze überdecken. Dazu brauchen wir wesentlich unsern zweiten Satz. Es sollen nun die Linien  $u = \text{const}$  die Orthogonaltrajektorien der geodätischen Linien  $v = \text{const}$  sein.

Wir behaupten nun, dass für ein solches Koordinatennetz, das aus geodätischen Linien und deren Orthogonaltrajektorien besteht, die Grössen  $E, F, G$  besonders einfache Werte annehmen. Es ist zunächst

$$(20) \quad F = 0;$$

denn wir haben es mit einem Orthogonalsystem zu tun. Nun ist die Krümmung gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{A_v}{AB} \right|$$

also wird für die Linien  $v = \text{const}$

$$(21) \quad A_v = 0$$

oder

$$(22) \quad A = A(u)$$

Andererseits war

$$ds^2 = (E, F, G) = A^2 du^2 + B^2 dv^2$$

Führen wir nun statt  $u$  einen neuen Parameter  $u^*$  ein durch die Gleichung

$$du^* = A(u) du$$

oder

$$\frac{du^*}{du} = A(u),$$

oder

$$u^* = \int A(u) du,$$

und schreiben wir nun wieder statt  $u^*$   $u$ , so wird

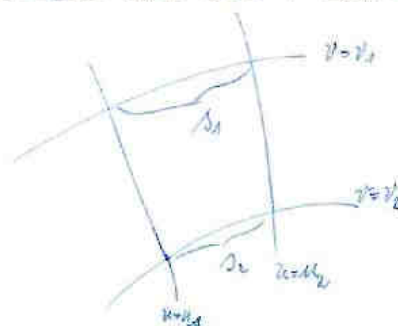
$$(23) \quad ds^2 = du^2 + G dv^2$$

wobei aber die Grösse  $G$  nicht mit der Fundamentalgrösse zu verwechseln ist.

Aus dieser Gleichung (23) folgt unmittelbar, ein Satz über die Orthogonaltrajektorien geodätischer Linien; man nennt derartige Trajektorien geodätische Parallelele. Dann heisst der Satz:

Die orthogonalen Trajektorien eines geodätischen Feldes schneiden auf den geodätischen Linien des Feldes gleiche Längen ab.

Es seien also zwei geodätische Linien  $v = v_1$  und  $v = v_2$  gegeben und zwei geodätische Parallelele  $u = u_1$  und  $u = u_2$ . Dann interessieren wir uns für die Bogenlängen auf den  $v$ -Kurven. Sie seien  $s_1$  und  $s_2$ . Dann heisst die Behauptung



Figur 11.

$$(24) \quad s_1 = s_2$$

Für  $v = \text{const}$  folgt nun nach (23)

$$ds = du,$$

d.h. etwa

$$(25) \quad s_1 = s_2 = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$$

Dieser Satz kann als Verallgemeinerung eines Satzes in der Ebene aufgefasst werden. Da werden die geodätischen Linien Gerade. Denken wir irgendeine ebene Kurve und

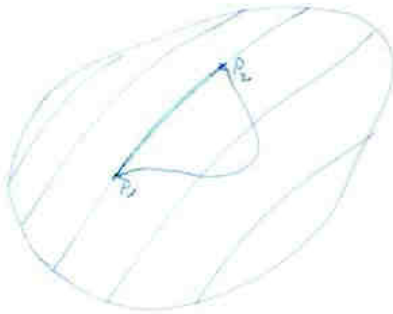


Figur 13.

ziehen die Tangenten und ihre Orthogonaltrajektorien. Dann schneiden diese auf den Tangenten gleiche Stücke ab. (s. Fig. )

Aus der Formel (23) folgt ferner unmittelbar folgender Satz:

Lässt sich ein Bogen einer geodätischen Linie in ein Feld von geodätischen Linien einbetten, so liefert diese geodätische Linie die kürzeste Verbindung zwischen zwei ihrer Punkte im Vergleich zu allen anderen, innerhalb des Feldes verlaufenden Kurven.



Figur 14.

Wir denken uns die geodätische Kurve, die die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  verbindet, als Kurve  $v=0$  gegeben. Dann sind die übrigen geodätischen Linien des Feldes die Linien  $v = \text{const}$ . Die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  mögen den Parameterwerten  $u=0$  und  $u=1$  entsprechen. Das kann man durch entsprechende Wahl des Parameters  $u$  immer erreichen. Betrachten wir

nun eine beliebige Kurve, welche die beiden Punkte verbindet und die ganz innerhalb des Gebietes, das wir schlicht mit geodätischen Linien überdeckt haben, verläuft. Dann ist die Bogenlänge dieser Kurve gegeben durch

$$(26) \quad s = \int ds = \int \sqrt{1 + G v'^2} du .$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass sich  $v$  als Funktion von  $u$  auffassen lässt. Wegen

$$G > 0$$

folgt aus (26)

$$(27) \quad s \geq \int du = 1$$

Es ist also die Bogenlänge einer jeden Kurve, die nicht mit der geodätischen Linie zusammenfällt, länger als diese.

Die Bedingung des Einbettens ist dabei nicht überflüssig. Davon kann man sich am besten auf der Kugeloberfläche überzeugen. Da sind die Grosskreise die geodätischen Linien. Jeder Grosskreisbogen, der kleiner als ein Halbkreis ist, lässt sich in geodätische Linien einbetten, dagegen nicht ein solcher, der diametral gegenüberliegende

Punkte enthält. Tatsächlich liefert aber auch ein Grosskreisbogen, der über einen Halbkreis hinausragt, für die Bogenlänge kein Minimum. Wir werden sehen, dass diese Eigenschaft der Grosskreise auch für alle geodätischen Linien in gewissem Sinne erfüllt ist. Die geodätische Linie hört plötzlich auf, die kürzeste Entfernung zu sein. Und das Auftreten dieser Erscheinung ist an das Vorhandensein eines Schnittpunktes geknüpft. Wir haben ja bei der Ableitung unseres letzten Satzes die Voraussetzung gemacht, dass wir ein schnittpunktfreies Flächenstück vor uns haben.

§59: Ableitung der geodätischen Linie aus einem Variationsprinzip.

Nachdem wir nun gesehen haben, dass die geodätischen Linien innerhalb einer gewissen kleinen Umgebung die kürzesten Verbindung zweier Punkte darstellen, liegt es nahe, die geodätische Linie aus einem Variationsprinzip abzuleiten. Da erhalten wir also folgendes Problem:

Wir betrachten auf einer Fläche zwei Punkte und verbinden sie durch eine beliebige Kurve, die wir in der Form

$$(1) \quad u = u(t) \quad , \quad v = v(t)$$

darstellen. Von dieser Kurve wollen wir voraussetzen, dass sie sich nur innerhalb eines gewissen Flächenstückes befindet, das durch ein Koordinatensystem eindeutig überdeckbar ist. Dann wird die Bogenlänge dieser Kurve

$$(2) \quad S = \int \sqrt{E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2} \, dt$$

Dabei haben wir o.B.d.A. angenommen, dass die beiden Punkte  $u_0, v_0$  und  $u_1, v_1$ , durch welche die Kurve hindurchgeht, den Parameterwerten  $t = 0$  und  $t = 1$  entsprechen. Es ist nun  $S$  eine Funktion, die von dem ganzen Verlauf der Kurve abhängt. Die Aufgabe,  $S$  möglichst klein zu machen, führt darauf hinaus, die Funktionen  $u(t)$  und  $v(t)$  richtig zu wählen. Die verlangte Kurve muss also einmal die Eigenschaft haben, für  $t=0$  und  $t=1$  die vorgeschriebenen Werte anzunehmen, und ferner muss sie (2) zum Minimum machen.

Es gibt nun Fälle, bei denen sich das Problem mit einem Schlage lösen lässt. Das ist der Fall, wenn Quadratsummen auftreten und man das Vorzeichen kennt. Dann weiss

man etwa, dass die Quadratsumme nicht negativ werden kann und hat damit schon den Extremwert gefunden. Im allgemeinen Fall lässt sich dieses Problem aber nicht so einfach lösen. Da muss man in zwei Schritten vorgehen. Zunächst muss dafür sorgen, dass die Kurve stationär ist, und dann muss man zu- sehen, ob auch wirklich ein Minimum vorliegt.

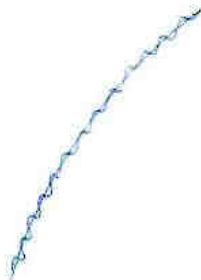
Man kann nun berücksichtigen, dass die betrachtete Kurve eine Raumkurve ist, kann also vergessen, dass sie auf einer Fläche verläuft. Dann kann man sie in vektorieller Form schreiben und erhält für die Bogenlänge

$$(3) \quad S = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Von dieser Form wollen wir ausgehen.

Die Stationarität besagt nun, dass eine gewisse Grösse sich in erster Näherung nicht ändert, wenn man zu Nachbarargumenten übergeht. Wir haben also zu untersuchen, wie sich die Grösse  $S$  ändert, wenn wir von den Argumenten  $u(t)$  und  $v(t)$  zu gewissen Nachbarwerten übergehen. Dabei werden wir eine Kurve eine Nachbar- kurve nennen, wenn sie sich in ihrem ganzen Verlauf nur wenig von unserer Kurve unterscheidet.

Dieser Begriff der Nachbarkurve führt aber auf Schwierigkeiten. Betrachten wir z. B. den Fall der nebenstehenden



Figur. Dort haben wir zwei Kurven gezeichnet, die sich tatsächlich in ihrem ganzen Verlauf nur wenig voneinander unterscheiden, und doch ist die Bogenlänge der einen Kurve um Vieles grösser als die der andern. Wenn wir also nur verlangen, dass die beiden Kurven in einem gewissen schmalen Streifen verlaufen, so ist das für derartige Fälle offenbar

nicht ausreichend. Wir müssen noch Voraussetzungen über die Ableitungen der beiden Kurven machen, müssen also verlangen, dass auch die Ableitungen sich in Nachbar- punkten nur wenig voneinander unterscheiden.

Unser Begriff der Nachbarkurve lässt sich nun endlich in folgende Form kleiden: Wir denken uns die Funktionen  $u(t)$  und  $v(t)$  ersetzt durch die Funktionen  $u(t; \epsilon)$  und  $v(t; \epsilon)$  und verlangen, dass

$$(4) \quad \begin{aligned} u(t; \epsilon) &\longrightarrow u(t) \\ v(t; \epsilon) &\longrightarrow v(t) \\ u'(t; \epsilon) &\longrightarrow u'(t) \\ v'(t; \epsilon) &\longrightarrow v'(t) \end{aligned} \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0$$



Das ist ein Prinzip, das man auf jedes Variationsproblem anwenden kann.

Wir denken uns die Kurve also nun in der Gestalt gegeben

$$(5) \quad \gamma = \gamma(t, \varepsilon).$$

Das ist eine Kurve, die ganz in der Nachbarschaft der ursprünglichen Kurve verläuft. Dann reduziert sich unser Problem auf ein solches der Differentialrechnung. Es wird jetzt wenn wir die Ausgangskurve festgehalten denken,  $\gamma$  eine Funktion von  $\varepsilon$  werden. Wenn nun die betrachtete ursprüngliche Kurve stationär sein soll, so muss also gelten

$$(6) \quad \left( \frac{\delta S}{\delta \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0$$

Wir haben also nach  $\varepsilon$  zu differenzieren und dann  $\varepsilon=0$  zu setzen. Aus (3) folgt dann

$$(7) \quad \left( \frac{\delta S}{\delta \varepsilon} \right)_0 = \int_0^1 \frac{\dot{\gamma} \dot{\gamma}' \varepsilon}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}} dt = 0$$

Der Vektor  $\dot{\gamma}'$  drückt aus, wie sich die Tangente ändert, wenn wir zur Nachbarkurve übergehen. Diese Änderung können wir ganz willkürlich vorgeben. Unser Problem lautet also nun: Wie müssen wir  $\dot{\gamma}'$  wählen, wie auch  $\dot{\gamma}'$  vorgegeben sein mag, damit das Integral (7) verschwindet? Da wenden wir einen Kunstgriff an. Wir integrieren partiell und erhalten

$$(8) \quad \int_0^1 \frac{\dot{\gamma} \dot{\gamma}' \varepsilon}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}} dt = \left. \frac{\dot{\gamma} \dot{\gamma}' \varepsilon}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}} \right|_0^1 - \int_0^1 \dot{\gamma}' \left( \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}} \right)' dt.$$

Da wir nun vorausgesetzt haben, dass die beiden betrachteten Kurven an den Endpunkten übereinstimmen, stimmt auch  $\dot{\gamma}'$  an den beiden Endpunkten überein, und der erste Term auf der rechten Seite von (8) verschwindet. Wir erhalten also

$$(9) \quad \int_0^1 \frac{\dot{\gamma} \dot{\gamma}' \varepsilon}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}} dt = - \int_0^1 \dot{\gamma}' \left( \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}} \right)' dt.$$

Wir haben nun also nur noch dafür zu sorgen, dass das in dem Integral auf der rechten Seite auftretende skalare Produkt an jeder Stelle der Kurve verschwindet. Von dem Vektor  $\dot{\gamma}'$  wissen wir nun, dass er in der Tangenzialebene der Kurve verlaufen muss, weil ja  $\gamma(t, \varepsilon)$  die Nachbarkurve von  $\gamma(t)$  in der Fläche ist. Setzen wir

$$(10) \quad \left( \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\dot{\gamma}^2}} \right)' = \gamma,$$

so muss also, wenn das Integral in (9) verschwinden soll,

$\gamma$  senkrecht auf  $\xi$  stehen. Es muss also  $\gamma$  normal zur Fläche stehen:

$$(11) \quad \gamma = \lambda \cdot \xi,$$

wenn  $\xi$  der Normaleneinheitsvektor ist.

Aus diesem Variationsansatz kann man eine sehr elegante Folgerung ziehen, nämlich, dass wenn sich zwei Flächen in einer derartigen Kurve berühren, diese Kurve die kürzeste in beiden Flächen ist. Das Verschwinden des Integrales (9) führt ja zu der Forderung, dass  $\gamma$  die Richtung von  $\xi$  haben soll, und die beiden Flächen sich berühren, ist längs der Berührungskurve der Vektor  $\xi$  in beiden Flächen derselbe.

Daraus kann man nun schon ohne Rechnung ableiten, dass die Kurven mit  $\frac{1}{\rho} = 0$  die kürzesten sind. Wir haben von der geodätischen Krümmung gesehen, dass sie die Eigenschaft besitzt, auf zwei Flächen, die sich berühren, längs der Berührungskurve dieselbe zu sein in beiden Flächen. Es berühren sich nun die beiden Flächen längs einer Torse. Da wissen wir aber, dass, wenn die Kurve auf der Torse die Krümmung  $\frac{1}{\rho} = 0$  hat, auch, wenn wir die Torse auf die Ebene abwickeln, die dadurch entstehende ebene Kurve die Krümmung Null haben muss, also eine Gerade ist. Wenn also umgekehrt nachgewiesen wird, dass die kürzeste Kurve in der Ebene eine Gerade ist, sind wir fertig. Das ist aber, wie wir wohl ohne Beweis hinnehmen können, der Fall.

Wir gehen nun, um die Differentialgleichung der geodätischen Linie in expliziter Gestalt zu bekommen, von der Gleichung (2) aus. Wir setzen

$$(12) \quad t = v$$

Dann reduziert sich das Integral (2) auf

$$(13) \quad S = \int \sqrt{Eu'^2 + 2Fu' + G} \, dv$$

Führen wir ein Gaussisches Koordinatensystem (s. §58) ein, so reduziert sich das Integral nach §58 (23) auf

$$(14) \quad S = \int \sqrt{u'^2 + G} \, dv$$

Für diesen Fall wollen wir die Rechnung durchführen. Gehen wir zur Nachbarkurve über, so ist

$$(15) \quad \left. \begin{aligned} u(\varepsilon, v) &\rightarrow u(v) \\ u'(\varepsilon, v) &\rightarrow u'(v) \end{aligned} \right\} \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0$$

Dann wird

$$(16) \quad \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2u'u'_\varepsilon + G_u u'_\varepsilon}{\sqrt{u'^2 + G}} dv$$

Setzen wir

$$u_\varepsilon = \delta u, \quad u'_\varepsilon = \delta u', \quad \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \delta S,$$

so wird

$$(17) \quad \delta S = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2u' \delta u' + G_u \delta u}{\sqrt{u'^2 + G}} dv$$

Um  $\delta u'$  hinauszuschaffen, integrieren wir partiell und erhalten

$$(18) \quad \delta S = \delta u \frac{2u'}{\sqrt{u'^2 + G}} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \delta u \left[ \frac{G_u}{\sqrt{u'^2 + G}} - \left( \frac{2u'}{\sqrt{u'^2 + G}} \right)' \right] dv.$$

Da an den beiden Endpunkten  $\delta u$  denselben Wert für beide Kurven hat, verschwindet der erste Term auf der rechten Seite und wir erhalten

$$(19) \quad \delta S = \frac{1}{2} \int_0^1 \delta u \left[ \frac{G_u}{\sqrt{u'^2 + G}} - \left( \frac{2u'}{\sqrt{u'^2 + G}} \right)' \right] dv$$

Es ist nun

$$(20) \quad \begin{aligned} \left( \frac{2u'}{\sqrt{u'^2 + G}} \right)' &= \frac{2u''}{\sqrt{u'^2 + G}} + 2u' \left( \frac{1}{\sqrt{u'^2 + G}} \right)' \\ &= \frac{2u''}{\sqrt{u'^2 + G}} - \frac{u'(2u'u'' + G_u u' + G_v)}{(\sqrt{u'^2 + G})^3} \end{aligned}$$

Setzen wir (20) in (19) ein, wo erhalten wir nach (6) als Bedingungsgleichung für die geodätische Linie

$$\begin{aligned} 0 &= G_u(u'^2 + G) - 2u''(u'^2 + G) + u'(2u'u'' + G_u u' + G_v) \\ &= G_u(u'^2 + G) - 2u''G + u'^2 G_u + u' G_v \\ &= -2G u'' + 2G_u u'^2 + u' G_v + G G_u \end{aligned}$$

oder

$$(21) \quad u'' = u' \cdot 2 \frac{G_u}{G} + u' \cdot \frac{G_v}{2G} + \frac{G_u}{2}$$

§60: Ein Satz über die Gaussische Krümmung.

Wir haben schon davon gesprochen, dass ein wesentliches Problem darin besteht, ob man mittels der Gaussischen Krümmung allein auf einer Fläche messen kann. Das sind Fragen, welche die Struktur der geodätischen Linie betreffen. Wir haben schon gesagt, dass für die Abbildung zweier Flächen aufeinander notwendig sei, dass die Gaussische Krümmung konstant ist und denselben Wert hat. Es gibt nun offenbar Flächen, die nicht längentreu aufeinander abgebildet sind, wobei aber doch bei der Abbildung geodätische Linien in geodätische Linien übergehen, z.B. bei der Zentralprojektion. Es ist also offenbar eine Aussage über die Krümmung wesentlicher als über geodätische Linien.

Wir wollen nun eine Formel ableiten, auf Grund deren es möglich ist, mit Hilfe geodätischer Linien die Gaussische Krümmung zu verpessen. Wir haben für die Gaussische Krümmung die Formel abgeleitet

$$(36;4) \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

und wir hatten beim theorema egregium gefunden

$$(1) \quad K = \frac{1}{EG^2} \left\{ (g_{11}, g_{21}, g_{22}) (g_{11}, g_{21}, g_{22}) - (g_{12}, g_{21}, g_{22})^2 \right\}$$

und in (56;3)

$$(2) \quad Z = (g_{11}, g_{21}, g_{22}) (g_{11}, g_{21}, g_{22}) - (g_{12}, g_{21}, g_{22})^2$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & g_{11} g_{21} \\ F & G & g_{11} g_{22} \\ g_{11} g_{21} & g_{11} g_{22} & g_{11}^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & g_{12} g_{21} \\ F & G & g_{12} g_{22} \\ g_{12} g_{21} & g_{12} g_{22} & g_{12}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & g_{11} g_{21} \\ 0 & G & g_{11} g_{22} \\ 0 & 0 & g_{11} g_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G & \frac{1}{2} G_u \\ 0 & \frac{1}{2} G_u & g_{12}^2 \end{vmatrix} /$$

da für uns  $E = 1$  ist, also alle Ableitungen von  $E$  verschwinden, und da ausserdem  $F = 0$  ist.

Wir entwickeln beide Determinanten nach den Elementen der letzten Zeile und erhalten

$$(3) \quad Z = G f_{uv} f_{uv} - G f_{uv}^2 + \frac{1}{4} G_u^2 \\ = G (f_{uv} f_{uv} - f_{uv}^2) + \frac{1}{4} G_u^2 ,$$

oder wegen §56 (17)

$$(4) \quad Z = \frac{1}{4} G_u^2 - \frac{1}{2} G G_{uu} .$$

Setzen wir diesen Wert in (1) ein, so ergibt sich

$$(5) \quad K = \frac{Z}{EG^2} = \frac{E}{G^2} = \frac{1}{4} \frac{G_u^2}{G^2} - \frac{1}{2} \frac{G_{uu}}{G} .$$

Wir setzen nun

$$(6) \quad \sqrt{G} = B .$$

Dann wird

$$(7) \quad G_u = 2 B B_u$$

und

$$(8) \quad G_{uu} = 2B_u^2 + 2 B B_{uu} .$$

Setzen wir (7) und (8) in (5) ein, so folgt

$$K = \frac{B_u^2}{B^2} - \frac{B_u^2 + B B_{uu}}{B^2} = - \frac{B_{uu}}{B}$$

oder

$$(9) \quad \boxed{B_{uu} + K B = 0}$$

In dieser Formel steckt eine Möglichkeit, mit Hilfe der geodätischen Linien die Gaussische Krümmung zu vermessen. Unter Benutzung eines Gaussischen Koordinatensystems und wenn wir  $u = 0$  als geodätische Linie mit  $v$  als Bogenlänge einführen, wird

$$(10) \quad B(0, v) = 1 , \quad B_u(0, v) = 0 .$$

Durch diese Randbedingungen und die Differentialgleichung (9) ist die Funktion  $B$  leicht berechenbar. Ist zunächst  $K = 0$ , so wird

$$(11) \quad B = a(v) u + b(v)$$

Wegen (10) ist

$$b = 1, \quad a = 1,$$

und es geht die Gleichung

$$(12) \quad ds^2 = du^2 + G dv^2 = du^2 + B^2 dv^2$$

wegen  $B = 1$  über in

$$(13) \quad ds^2 = du^2 + dv^2,$$

also in die Massbestimmung der Ebene. Damit haben wir wieder bestätigt, dass die Torsen, die ja durch verschwindende Gaussische Krümmung definiert waren, im Kleinen längentreu auf die Ebene abwickelbar sind.

Betrachten wir nun den Fall  $K > 0$ . Dann hat die allgemeine Lösung von (9) die Form

$$(14) \quad B = a(v) \cos(-\sqrt{K} u) + b(v) \sin(-\sqrt{K} u).$$

Unter Berücksichtigung der Randwerte ergibt sich

$$(15) \quad a = 1, \quad b = 0,$$

und wir erhalten

$$(16) \quad B = \cos(-\sqrt{K} u).$$

Es folgt also aus (12)

$$(17) \quad ds^2 = du^2 + \cos^2(-\sqrt{K} u) dv^2.$$

Schliesslich betrachten wir den Fall  $K < 0$ . Da ist die Lösung von (9)

$$(18) \quad B = a(v) e^{\sqrt{-K} u} + b(v) e^{-\sqrt{-K} u}.$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\sqrt{-K} a e^{\sqrt{-K} u} - b \sqrt{-K} e^{-\sqrt{-K} u} = 0$$

oder

$$a = 1, \quad a + b = 1,$$

also

$$a = b = \frac{1}{2},$$

so dass aus (18) folgt

$$(19) \quad B = \frac{1}{2} (e^{\sqrt{-K} u} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{-K} u}) = \cos \text{hyp} (\sqrt{-K} u)$$

Es wird also nach (12)

$$(20) \quad ds^2 = du^2 + \cos^2 \text{hyp} (\sqrt{-K} u) dv^2$$

In den gewonnenen Ergebnissen sind folgende Sätze enthalten:

Zwei genügend kleine Stücke zweier Flächen mit demselben Gaussischen Krümmungsmass sind stets längentreu aufeinander abbildbar.

Dass der Satz für Flächen in ihrer Gesamterstreckung nicht mehr gilt, wird später gezeigt werden.

Da nun ferner der Punkt  $u = 0, v = 0$  und die Richtung der Geraden  $v = 0$  durch ihn noch beliebig wählbar sind, erkennt man:

Jede Fläche festen Krümmungsmasses gestattet eine Gruppe längentreuer Abbildungen auf sich selbst; und zwar kann einem Punkt und einer hindurchgehenden Richtung ein beliebiger anderer Punkt und eine beliebige Richtung durch diesen zugeordnet werden.

Wir können ja einen Teil der Fläche als Teil einer ganz anderen Fläche ansehen und den vorigen Satz anwenden.

Da nun die Spiegelung ebenfalls zur Gruppe der isometrischen (längentreuen) Abbildungen gehört, werden alle derartige Abbildungen nicht eindeutig, sondern nur bis auf eine Spiegelung bestimmt sein.

### §61: Die Gauss-Bonnetsche Formel.

Wir wollen noch einen interessanten Zusammenhang zwischen der Gaussischen Krümmung und der inneren Geometrie einer Fläche bestimmen. Da verlassen wir wieder den Sonderfall  $K = \text{const.}$

Wir denken uns ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das wir ganz mit einem Parameternetz überdecken können, und auf diesem Flächenstück eine geschlossene Kurve gezogen. Längs dieser Kurve betrachten wir das Integral

$$\oint \frac{ds}{r}$$

Ferner betrachten wir ein Flächenintegral über das

von der betrachteten Kurve umschlossene Flächenstück. Damit es ein solches gibt, müssen wir voraussetzen, dass die Kurve sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Unsere Behauptung heisst dann

$$(1) \quad \int_{\beta} \frac{ds}{\rho} + \int K d\sigma = 2\pi$$

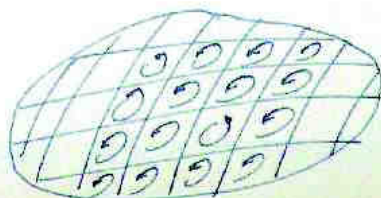
Das zweite Integral kennen wir schon: es ist der Flächeninhalt des sphärischen Bildes.

Ist diese Behauptung bewiesen, so haben wir von neuem gezeigt, dass die Gaussische Krümmung nur von einem Linienelement abhängt.

Wir haben nun, ehe wir an den Beweis der Formel (1) gehen, noch eine Verallgemeinerung zu machen. Bisher haben wir die geodätische Krümmung immer nur ihrem Betrage nach betrachtet; jetzt wollen wir das Vorzeichen mit berücksichtigen. Wir legen das Vorzeichen durch die Gleichung

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$$

fest. Die Determinante bekommt offenbar dann ein positives Vorzeichen, wenn die drei Vektoren  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  sich stetig in die drei Achsen eines gewöhnlichen Koordinatensystems (Rechtssystem) deformieren lassen. Das können wir noch genauer fassen.  $\rho$  wechselt sein Vorzeichen, wenn wir den Umlaufsinn der Kurve ändern. Dann vertauscht sich  $\eta$  mit  $-\eta$  und  $\zeta$  bleibt unverändert. Infolgedessen wird die Determinante, da auch  $\xi$  unverändert bleibt, mit  $(-1)$  multipliziert. Ebenso ändert  $\frac{1}{\rho}$  sein Vorzeichen, wenn wir die Orientierung der Fläche ändern, wenn also die Normale zur entgegengesetzten übergeht. Das Vorzeichen hängt also lediglich von Festsetzungen ab. Wir setzen nun Durchlaufungssinn der Kurve und die Wahl der Normalen so fest, dass ein positives Vorzeichen auftritt. Dann nennen wir die Kurve positiv umlaufen, wenn ihre Projektion auf die Tangentialebene positiv durchlaufen wird, falls wir die Tangentialebene vom Endpunkte der Normalen betrachten. Diese Definition gilt zwar zunächst nur für kleine  $\times\times\times$  Flächenstücke, aber wenn der Umlaufsinn für derartig kleine Flächen definiert ist, kann man ihn, wie Figur 15 zeigt, ohne Schwierigkeit



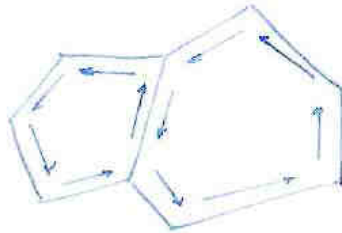
Figur 15

auf grössere Flächenstücke übertragen. Die Linienintegrale über die doppelt durchlaufenen Strecken heben sich fort.

Unter unseren Voraussetzungen hat nun  $\oint \frac{1}{\rho}$  als eine angenehme



angenehme Eigenschaft. Man kann dieses Integral nämlich für Polygonenzüge übernehmen. Da wird zwar zunächst für jede einzelne Strecke  $\frac{1}{R} = 0$ , und in jeder Ecke wird  $\frac{1}{R} = \infty$ , aber bei einem gewissen Grenzübergang hat es einen Sinn. Betrachten wir zwei Polygonenzüge auf einer Fläche, die mit einer Seite zusammenfallen, (s. Fig. 16), dann ist das Integral über das Gesamtpolygon gleich der Summe der Integrale über die beiden einzelnen Polygone. Wenn man das erkannt hat, so sieht



Figur 16.

man sofort, dass  $\int \frac{1}{R} ds$  sich durch ein Flächenintegral ausdrücken lassen muss; denn wenn man das Integral additiv zusammensetzen kann, dann muss man es auch zersplittern können; es muss sich also schreiben lassen als Summe der Integrale über die einzelnen Maschen, wenn man das betrachtete Flächenstück

durch ein dichtes Maschennetz übersieht.

Wir wollen zunächst zeigen, dass  $\int \frac{1}{R} ds$  auch noch einen Sinn behält, wenn man über Polygonen integriert. Wir schreiben

$$(3) \quad (\xi, \eta, \zeta) ds = (\xi, \eta, d\zeta).$$

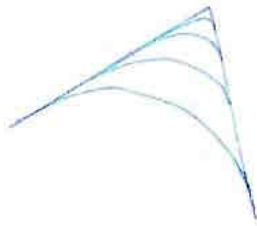
Das ist nur eine formale Umschreibung. Dieses Integral können wir als Grenzwert einer Summe auffassen:

$$(4) \quad (\xi, \eta, d\zeta) = \lim \sum (\xi, \eta, \frac{\Delta\zeta}{\Delta s}) \Delta s \\ = \lim \sum (\xi, \eta, \Delta\zeta).$$

Diese Formel ist sehr anschaulich. Greifen wir einen Summanden heraus. Die beiden Vektoren  $\xi$  und  $\eta$  haben die Länge 1 und stehen aufeinander senkrecht. Sie bestimmen also durch ihr vektorielles Produkt einen Einheitsvektor, der sich zu  $\xi$  und  $\eta$  so verhält wie die dritte Achse eines rechtshändigen Systemes. Die Determinante  $(\xi, \eta, \Delta\zeta)$  ist nun das skalare Produkt aus dem inneren Produkte von  $\xi$  und  $\eta$  und dem Vektor  $\Delta\zeta$ , d.h. die Projektion von  $\xi \times \eta$  auf  $\Delta\zeta$ . Es wird also  $\frac{1}{R} > 0$ , wenn die Änderung  $\Delta\zeta$  der Tangente, von  $\xi$  aus gesehen, in positivem Sinne verläuft; der Vektor  $\eta$  selbst gibt an, wie stark diese Änderung ist.

Wir haben nun zu untersuchen, was geschieht, wenn wir zu Polygonen übergehen. Da werden wir das Integral

so erklären: Es ist der Limes der Integrale, die wir erhalten, wenn wir diese eckige Kurve durch eine differenzierbare ersetzen, und wenn wir dann den Grenzübergang zu immer grösserer Krümmung durchführen. Man hat also im Grenzfalle die Winkel, um die sich die



Figur 17

Tangente der Kurve an der Ecke  $\alpha$  dreht, zu dem Integral hinzuzufügen. In diesem Sinne ist das Integral zu verstehen, dass also alle Winkel, die auftreten, (mit Vorzeichen) hinzugenommen werden zum Integral.

Wir brauchen nun zum Beweis der Gauss-Bonnetschen Formel noch einige Hilfssätze:

1.)

Zunächst einmal müssen wir ~~xxxxxxx~~ noch einen strengeren Beweis geben für die Tatsache, dass bei dem Linienintegral an auftretenden Ecken die Winkel hinzugezählt werden müssen.



Figur 18.

Wir betrachten einen Polygonenzug ABC (s. Fig. 18), der aus zwei stetig geodätisch gekrümmten Stücken AB und BC zusammengesetzt ist. In den dadurch entstehenden Winkel hinein legen wir eine Kurve, die die beiden Schenkel in A und B tangiert und von der wir voraussetzen, dass die Krümmung auf ihr

das Vorzeichen nicht wechselt. Auf diesem Bogen  $b$  betrachten wir das Integral

$$(A, B) = \int_b \frac{1}{r_g} ds.$$

Dann heisst unsere Behauptung:

Wenn wir die Punkte A und B gegen den Punkt C konvergieren lassen, so konvergiert das Integral  $(A, B)$  gegen den Winkel  $\alpha$ .

Der Gedankengang des Beweises ist nun folgender: Man projiziert die Figur auf die Tangentialebene in C. Dabei macht man einen Fehler, den wir abschätzen müssen. Wir finden dann, dass, wenn A und B gegen C konvergieren, der Fehler in hoher Grössenordnung gegen Null geht. Das Integral über die Projektion ist nun  $\alpha$ , denn in der Ebene geht die geodätische Krümmung in die gewöhnliche über, also

in den Ausdruck  $\frac{d\alpha}{ds}$ , wenn  $\alpha$  den Winkel zwischen der Tangente und einer festen Richtung bedeutet. Es wird also das Integral selbst  $\alpha$ . Unser Problem ist nun also, zu untersuchen, wie sich die geodätische Krümmung ändert, und wie sich das Bogenelement ändert, wenn wir die Kurve auf die Tangentialebene projizieren. Das ist ein Problem, das eigentlich in die darstellende Geometrie gehörte.

Wir untersuchen zunächst wie sich die Länge bei der Projektion ändert. Deuten wir die projizierten Größen durch Sterne an, so ist

$$(5) \quad a^* = a \cos(\alpha, a^*) = a \cos \alpha,$$

wo  $a$  eine gewisse Strecke und  $a^*$  ihre Projektion ist. Wenn nun  $a$  und  $a^*$  einen sehr spitzen Winkel  $\alpha$  einschließen, dann ist  $\cos \alpha$  nahezu 1. Wir können dann entwickeln und erhalten

$$(6) \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Es unterscheidet sich also  $\cos \alpha$  nur in zweiter Ordnung von 1.

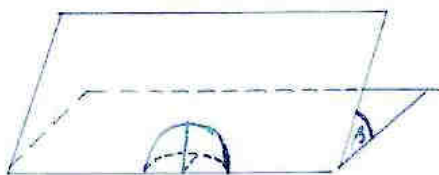
Wenn wir nun eine Strecke in einer Ebene auf eine andere Ebene, die mit der ersten einen Winkel  $\beta$  einschliesst, projizieren, dann ist der Winkel, den die Strecke gegen die Projektionsebene bildet, höchstens gleich  $\beta$ . Wenn wir etwa einen Kreis der einen auf die andere Ebene abbilden, bekommen wir eine Ellipse; die Verzerrung ist am höchsten Punkt am stärksten. Dort bilden die Radien gerade den maximalen Winkel  $\beta$ . Überall sonst ist der Winkel kleiner.

Ist nun  $\beta$  hinreichend klein, so erhalten wir für eine ganz beliebig gelegene Strecke  $a$  die Gleichung

$$(7) \quad a^* = a M,$$

wobei die Ungleichung erfüllt ist

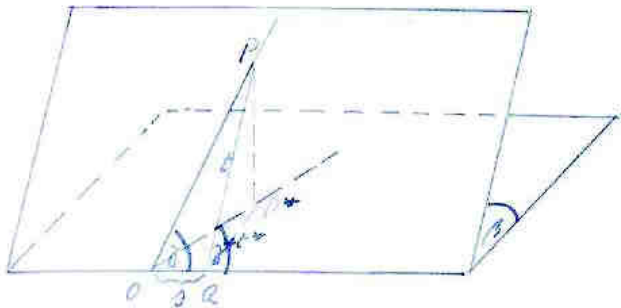
$$(8) \quad 1 - \beta^2 \leq M \leq 1 + \beta^2.$$



Figur 19.

Damit haben wir die Fehler, die wir bei der Projektion einer Strecke begehen, abgeschätzt. Es handelt sich nun noch darum, dieselben Betrachtungen für die Winkel durchzuführen. Anstatt nun die Winkel selbst zu untersuchen, genügt es offenbar, eine der Funktionen Sinus oder Tangens zu untersuchen. Da gehen wir nun so vor:

Wir betrachten zunächst nur solche Winkel, bei denen der eine Schenkel in der Schnittgeraden der beiden Ebenen liegt. (s. Fig. 20). Für diese Winkel wollen wir die Änderung abschätzen, und zwar mit Hilfe der Tangensfunktion.



Figur 20.

Dann ist, wenn wir die Größe des betrachteten Winkels mit  $\gamma$  bezeichnen,

$$(9) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{t}{s}.$$

Projizieren wir nun den Winkel  $\gamma$  orthogonal auf die zweite Ebene, so bleibt die Größe  $s$  erhalten. Die Strecke  $t$  wird in eine Größe  $t^*$  übergeführt, der Winkel  $\gamma$  in einen Winkel  $\gamma^*$ . Der rechte Winkel bei  $Q$  bleibt erhalten. Es wird

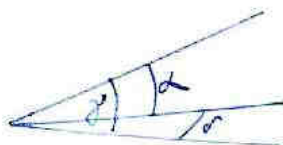
$$(10) \quad \operatorname{tg} \gamma^* = \frac{t^*}{s} = \operatorname{tg} \gamma \cos \beta.$$

für hinreichend kleinen Winkel  $\beta$ .

Betrachten wir nun daneben einen genau so konstruierten Winkel  $\delta$ , so gilt auch da

$$(11) \quad \operatorname{tg} \delta^* = \operatorname{tg} \delta \cos \beta.$$

Aus zwei derartigen Winkeln  $\gamma$  und  $\delta$  kann man nun (s. Fig. 21) irgendeinen Winkel  $\alpha$  herstellen. Dann ist offenbar



Figur 21.

$$\alpha^* = \gamma^* - \delta^*,$$

also

$$(12) \quad \operatorname{tg} \alpha^* = \frac{\operatorname{tg} \gamma^* - \operatorname{tg} \delta^*}{1 + \operatorname{tg} \gamma^* \operatorname{tg} \delta^*}$$

Führen wir in diese Gleichung die Werte aus (10) und (11) ein, so erhalten wir

$$(13) \quad \operatorname{tg} \alpha^* = \cos \beta \frac{\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \delta}{1 + \cos^2 \beta \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta}$$

oder

$$(14) \quad \operatorname{tg} \alpha^* = M_0 \frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta}{1 + M_0^2 \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta}$$

Wir haben also nur noch den Faktor  $\frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta}{1 + M_0^2 \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta}$  zu untersuchen.

Wären die Winkel  $\gamma$  und  $\delta$  klein, so wären wir schon fertig. Aber es sollen ja beliebige Winkel sein.

Wir haben also allgemein den Ausdruck

$$\frac{a+b}{a+Mb}$$

zu untersuchen. Da machen wir folgende Fallunterscheidung:

a.) Es sei

$$(15) \quad a \geq b$$

Dann ist

$$(16) \quad \frac{a+b}{a+Mb} = 1 + \frac{b(1-M)}{a+Mb} = 1 + \sqrt{\frac{b}{a+Mb}}$$

$$< 1 + \sqrt{\frac{a}{a}} = 1 + \beta.$$

b.) Es sei  $a < b$ .

Dann ist

$$\frac{a+b}{a+Mb} = \frac{1}{M} \frac{a+b}{\frac{a}{M} + b} = M \frac{a+b}{1 + aM_1 + b},$$

und damit ist der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt.

Wir erhalten also in jedem der beiden Fälle <sup>für</sup> den Ausdruck eine Grösse, die erst in zweiter Ordnung von 1 abweicht.

Wir erhalten also insgesamt

$$(17) \quad \operatorname{tg} \alpha^* = M \operatorname{tg} \alpha.$$

Es weicht also auch  $\alpha$  von  $\alpha$  erst in zweiter Ordnung ab.

Nach diesen Betrachtungen ist es nicht mehr schwer, die Anschätzungen zu endzuführen. Wir haben die beiden Integrale

$$\int \frac{ds}{\rho_g} \quad \text{und} \quad \int \frac{ds^*}{\rho_g^*}$$

zu vergleichen. Wenn wir nachweisen, dass bei der Projektion nur ein Faktor von der Art  $1 + \beta^2$  hinzuträt, sind wir fertig. Wir führen nun in dem zweiten Integrale statt  $ds^*$  wieder  $ds$  ein. Dann haben wir

$$(18) \quad \int_a^b \frac{ds^*}{\rho^*} = \int_a^b \frac{d\sigma}{\rho^*} \frac{ds^*}{ds} = \int_a^b \frac{d\sigma}{\rho^*} M_1$$

und wir erhalten

$$(19) \quad \int_a^b \frac{1}{\rho} ds = \int_a^b M \frac{1}{\rho^*} ds^*.$$

Da wir nun vorausgesetzt haben, dass  $\rho$  sein Vorzeichen auf der Kurve  $b$  nicht ändert, dass also der betrachtete Bogen monoton gekrümmt ist, können wir das Integral nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung abschätzen und erhalten, wenn wir noch  $\int_a^b \frac{1}{\rho^*} ds^* = \alpha'$  setzen

$$(1-\beta)\alpha < \int_a^b \frac{1}{\rho} ds < (1+\beta)\alpha.$$

Lassen wir  $\beta$  und  $\beta'$  gegen 0 rücken, dann geht  $\alpha'$  gegen  $\alpha$ , und wir erhalten in der Grenze

$$(20) \quad \alpha = \lim \int_a^b \frac{1}{\rho} ds. \quad \text{q.e.d.}$$

2.) Wir brauchen nun noch einen zweiten Hilfssatz, der sich auf die Additivität der Integrale bezieht. Es sei ein Bogen  $b$  vorgelegt, der mit stetiger geodätischer Krümmung von  $A$  nach  $B$  führt. Mit  $b'$  wollen wir dann einen Bogen bezeichnen, der auch von  $A$  nach  $B$  führt, der aber auf einer Teilstrecke des Bogens  $b$  von diesem abweicht.

Wir setzen

$$(21) \quad F_b = \int_a^b \frac{ds}{\rho} - 2\pi,$$

wobei  $\int$  andeuten soll, dass wir auch den Fall auftretender Winkel berücksichtigen wollen. Bezeichnen wir mit  $F_{b'-b}$  das Integral über den geschlossenen Weg, so behaupten wir

$$(22) \quad F_{b'} = F_b + F_{b'-b}.$$

Wir haben also die beiden Integrale dort zu vergleichen, wo sie voneinander abweichen. Die Grösse  $2\pi$  tritt dabei bei beiden Integralen auf, hebt sich also. Wir haben also die Gleichung zu beweisen:

$$(23) \quad \int_{a'}^{b'} \frac{ds}{\rho} = \int_a^b \frac{ds}{\rho} + \int_{b'-b} \frac{ds}{\rho} - 2\pi.$$

Was die glatten Bogen betrifft, so sind wir für sie, da

das Integral auf geschlossenem Wege verschwindet, schon fertig. An den Ecken haben wir nun jeweils den Winkel  $\alpha$  hinzuzufügen zu subtrahieren. Also ist die Formel (23) richtig und damit auch (22).

Nach diesen Hilfssätzen beweisen wir die Bonnetsche Formel zunächst für einen Spezialfall und von da aus allgemein. Wir behaupten nämlich, dass es genügt, die Bonnetsche Formel für kleine Flächen zu beweisen.

Die Gleichung, die wir beweisen sollen,

$$(24) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dr}{r} + \int K \, ds = 2\pi$$

können wir nach (21) in der Gestalt

$$(25) \quad F_b = - \int K \, d\sigma$$

schreiben. Wenn wir diese Formel für eine grössere Fläche beweisen wollen, so können wir wegen der Zusammenhangbarkeit des Flächenstückes das ganze Gebiet, das von der Kurve umgrenzt wird, in kleine Felder zerlegen. Wenn wir für jedes einzelne dieser Felder die Formel nachgewiesen haben werden, dann folgt auch wegen der Additivität der Integrale  $F_b$  die Formel für das ganze Gebiet. Das Integral  $\int K \, d\sigma$  ist ja als Flächenintegral eo ipso additiv. Es genügt also in der Tat, die Formel für kleine Flächenstücke zu beweisen. Und zwar genügt eine ganz willkürliche Feldeinteilung. Wir können daher den einfachsten Fall Gaussischer Koordinaten annehmen, können also setzen

$$(26) \quad ds^2 = du^2 + G \, dv^2.$$

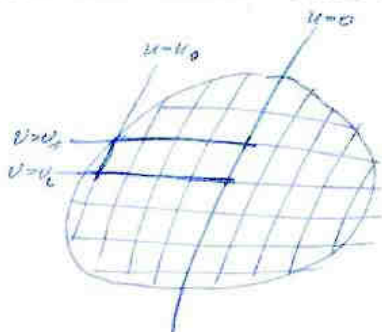
Wir denken uns also das betrachtete Flächenstück so klein gewählt, dass wir es ganz mit Gaussischen Koordinaten überziehen können.

Wir betrachten nun eine geodätische Linie  $u = 0$  und alle <sup>Richtungen</sup> ~~Wahlrichtungen~~ senkrecht zu ihr. Dadurch ist das Feld völlig bestimmt. Die Linien  $v = \text{const}$  sind dann die geodätischen Linien und die Linien  $u = \text{const}$  die geodätischen Parallelen. Sie sind im allgemeinen keine geodätische Linien, aber eine unter ihnen,  $u = 0$  haben wir als geodätische Linie vorausgesetzt. Damit haben wir die Willkür, die noch in der Wahl des Gaussischen Systems liegt, ausgenutzt, und unser Koordinatensystem liegt nun völlig fest. Durch unsere spezielle Wahl vereinfacht sich das Problem

ganz wesentlich.

Wir erhalten nun in dem (kleinen) Gebiete, das wir so durch ein Parameternetz überzogen haben, kleine Vierecke und am Rande Dreiecke (s. Fig. 23). Wir werden zeigen, dass wir die Dreiecke vernachlässigen dürfen.

Wir berechnen das Integral für einen Streckenzug, der aus einem Stück der Kurve  $u = 0$ , aus zwei geodätischen



Linien  $v = v_1$  und  $v = v_2$  und der geodätischen Parallelen  $u = u_0$  gebildet wird. Die Winkelbeiträge heben sich fort wegen der vorausgesetzten Orthogonalität. Es bleiben also nur noch die Integrale über die einzelnen Schenkel. Von denen sind drei geodätisch; sie liefern für das Integral keinen Beitrag. Es bleibt also nur der Beitrag

Figur 23.

vom Streckenzug  $u = u_0$ . Es ist wegen (26)

$$(27) \quad ds = \sqrt{G} dv.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = (\xi, \eta, \zeta) = (\xi_u, \xi_v, \xi_w) \left( \frac{du}{dn} \right)^3 - (\xi_u, \xi_v, \xi_w) \frac{1}{\sqrt{g}^3}$$

Wir erhalten also

$$(28) \quad F_B = \int (\xi_u, \xi_v, \xi_w) \frac{1}{\sqrt{g}^3} \sqrt{g} dv = \int (\xi_u, \xi_v, \xi_w) \frac{1}{g} dv.$$

Nun ist

$$(29) \quad (\xi_u, \xi_v, \xi_w) = \frac{b_u \times b_v}{W} b_u \times b_v.$$

Und nach der Vektorgleichung (Beweis siehe § , S. )

$$(30) \quad (a \times b)(a \times b) = (a \times)(b \times) - (a \times)(b \times)$$

wird

$$(31) \quad (\xi_u, \xi_v, \xi_w) = \frac{1}{W} \{ (b_u b_v)(b_u b_w) - (b_u b_w)(b_u b_v) \} = - \frac{1}{\sqrt{g}} (b_u b_w)(b_w) = - \frac{1}{\sqrt{g}} (b_u b_w).$$



Nun ist

$$0 = (\delta u \delta v)_v = \delta_u \delta_{vv} + \delta_{uv} \delta_u = \delta_u \delta_{vv} + \frac{1}{2} \delta_u,$$

also

$$(32) \quad \delta_u \delta_{vv} = -\frac{1}{2} \delta_u.$$

Setzen wir (32) in (31) ein, so folgt

$$(33) \quad (\xi, \delta_u, \delta_{vv}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \delta \delta_u = \frac{1}{2} \sqrt{g} \delta_u,$$

und durch Einsetzen von (33) in (28) erhalten wir

$$(34) \quad F_0 = \frac{1}{2} \int \frac{\delta_u}{\sqrt{g}} dv.$$

Wir setzen nun

$$(35) \quad \sqrt{G} = B$$

Dann wird

$$(36) \quad G_u = 2 B B_u$$

Setzen wir (35) und (36) in (34) ein, so wird

$$(37) \quad F_0 = \int B_u dv.$$

Es ist nun

$$(38) \quad K = -\frac{B_{uu}}{B}.$$

Dann wird

$$(39) \quad \int K do = \int K B du dv = - \int B_{uu} du dv.$$

Die Integration nach  $u$  können wir sofort ausführen. An der Stelle  $u = 0$  verschwindet  $B_u$  nach (33) und (36).

Also wird

$$(40) \quad - \int B_{uu} du dv = - \int B_u dv.$$

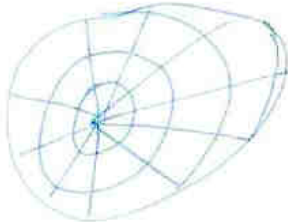
Setzen wir diesen Wert in (39) ein, so wird

$$(41) \quad \int K do = - \int B_u dv.$$

Dann folgt aber durch Einsetzen in (37)

$$(42) \quad F_b + \int K \, d\sigma = 0$$

Man kann nun mit Blaschke anstatt des Gaussischen Koordinatensystems auch ein anderes System wählen. Man betrachtet irgendeinen Punkt und verbindet ihn durch Kurven mit der gegebenen Kurve, zu diesen Kurven sucht man

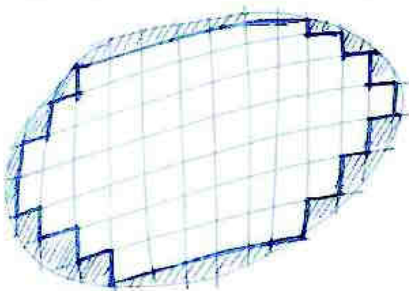


Figur 24.

die Orthogonaltrajektorien (s. Fig. 24). Ein solches System ist aber unvorteilhaft, weil ein Doppelpunkt vorhanden ist. Man muss in diesem Fall zeigen, dass gerade durch diese Singularität  $2\pi$  hineinkommt. Dazu sind aber wieder Hilfsbetrachtungen notwendig.

Es bleibt nun noch zu beweisen übrig, dass, wenn wir die einzelnen Vierecke addieren, der Ausdruck  $F_b$  wirklich gegen das Integral  $\int \frac{K}{H}$  geht, dass also der Beitrag der kleinen Randdreiecke zu vernachlässigen ist. Das geschieht durch folgende Betrachtung:

Wir denken uns das Gaussische Netz hingezichnet (s. Fig. 25). Dann können wir die Kurve  $b$  durch das Randpolygon approximieren. Den Fehler, der dadurch entsteht, müssen wir abschätzen. Dazu brauchen wir einen Hilfssatz.



Figur 25.

Was das Integral  $\int K \, d\sigma$  angeht, so ist klar, dass es in der Grenze in der Tat in das Integral über das ganze Gebiet übergeht. Beweisen müssen wir nur, dass auch das Integral über die geodätische Krümmung in das gewünschte Integral übergeht. Nennen wir  $F$  den Fehler, der dadurch entsteht, dass wir die

Kurve  $b$  ~~xxxxxxx~~ längs eines kleinen Bogenstückes durch zwei Seiten eines Dreieckes ersetzen. Die Summe dieser Fehler soll klein sein. Dass es über eines der Dreiecke genommen in der Grenze klein wird, ist klar, dass aber die Summe beim Grenzübergang klein bleibt, muss gezeigt werden, denn die Anzahl der Dreiecke wächst ja auch über alle Grenzen.

Um diesen Satz zu beweisen, denken wir uns das Netz so gewählt, dass die Hypotenusen aller Dreiecke unter einer gewissen kleinen Schranke  $\sigma$  liegt:

$$(43) \quad h \leq \sigma$$

Dass das möglich ist, folgt daraus, dass wir den geodätischen Durchmesser der Rechtecke, die bei der Teilung auftreten, so klein wählen können wie wir wollen.

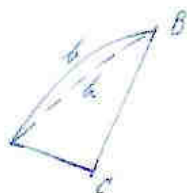
Diese Ungleichung (43) hat zur Folge, dass die Entfernung irgend zweier Punkte in dem einzelnen Dreieck sich durch abschätzen lässt. Bezeichnen wir diese Entfernung mit  $r$ , so wird also auch

$$(44) \quad r \leq c \sigma,$$

wo die Konstante  $c$  endlich ist und nur von dem Krümmungsverhältnissen abhängt. Sind die Krümmungsradien endlich, so bleibt  $c$  klein, also ist auch  $r$  klein. Führen wir nun den Winkel  $\beta$  ein, den die Tangentialebenen in den beiden Punkten miteinander bilden, so wird auch dieser Winkel klein sein, da der Abstand klein ist. Er ist aber nichts anderes als der Abstand der sphärischen Bilder der beiden Punkte. Der Winkel geht, wenn die Entfernung verschwindet, gegen Null. Der Quotient aus beiden bleibt dabei eine endliche Grösse. Es ist also

$$(45) \quad \beta \leq c_1 \sigma.$$

Wir denken uns nun die ganze Figur in die Tangentialebene in  $O$  projiziert. Der Winkel zwischen der Tangentialebene und der Fläche ist über die ganze Dreiecksfläche klein,



Figur 26.

von der Grössenordnung  $\sigma$ . Wir können also einen der vorigen Hilfssätze anwenden, nach dem wir wissen, dass sich die Bögen und Krümmungen bei der Projektion mit einem Faktor multiplizieren, der sich weniger als um

von 1 unterscheidet. Wir haben

diese Faktoren  $M$  genannt. Nun ist die

geodätische Krümmung einer Kurve auf der Fläche auch gleich der der Projektion auf die Tangentialebene.

Da sich aber die Tangentialebene in dem betrachteten Punkte von der in  $O$  nur wenig unterscheidet, weichen also die Krümmungen der beiden ebenen Kurven um weniger als voneinander ab.

Wir haben den Ausdruck

abzuschätzen. Es ist nun

$$(46)$$

wobei  $M$  die genannte Eigenschaft hat. Wir haben nun angenommen, dass auf unserer Kurve  $b$   $\frac{1}{\rho}$  sein Vorzeichen nicht wechselt. Wenn das nicht gelten sollte, dann können wir  $b$  in Teilkurven zerlegen, für die es einzeln gilt, und dann zusammensetzen, was ja erlaubt ist.

Wir nehmen nun für  $M$  den grössten und den kleinsten Wert,  $1+\sigma^2$  und  $1-\sigma^2$ . Das Integral ist nun um ein ebenes Dreieck herum erstreckt. Gehen wir in positivem Sinn um eines der Dreiecke herum, dann ist der Zuwachs gleich  $2\pi$ . Also ist

$$(47) \quad \int \frac{ds^*}{\rho^*} = 2\pi.$$

Wir erhalten also für die Abschätzung

$$(48) \quad (1 - D\sigma^2) 2\pi - 2\pi < \int \frac{ds}{\rho} \leq (1 + D\sigma^2) 2\pi - 2\pi$$

mit  $D > 0$

oder, wenn wir nur auf die Fehler achten

$$-2D\sigma^2\pi \leq F_\Delta \leq 2D\sigma^2\pi,$$

oder unter Einführung einer neuen Konstanten  $D'$

$$(49) \quad -D'\sigma^2 \leq F_\Delta \leq D'\sigma^2$$

Es hat also  $F_\Delta$  die Grössenordnung

$$(50) \quad |F_\Delta| \leq D'\sigma^2.$$

Nun haben wir

$$\sum F_\Delta$$

abzuschätzen. Es ist

$$(51) \quad \sum F_\Delta \leq \sum |F_\Delta| \leq \sum D'\sigma^2 \leq \sum D'\sigma\sigma_0,$$

wobei  $\sigma_0$  eine konstante Grösse mit  $\sigma_0 > 0$  ist. Wir können also  $D'\sigma_0$  aus der Summe herausziehen, und wir erhalten

$$(52) \quad \sum F_\Delta \leq D'\sigma_0 \sum \sigma = D'\sigma_0 b,$$

wobei  $b$  die Länge des betrachteten Bogens bezeichnen soll. Wir erhalten also

(53)

Damit sind wir endlich fertig, denn rechts steht eine kleine Grösse, da  $\epsilon_2$  hinreichend klein ist. Der Beweis ist also darauf zurückzuführen, dass  $F_{\triangle}$  von quadratischer Ordnung von  $\epsilon$  klein wird, dass also, obwohl unendlich viele Dreiecke berücksichtigt werden müssen, ihre Summe doch klein bleibt.

\*\*\*\*\*

### §62: Folgerungen aus der Bonnetschen Formel.

#### 1. Die Winkelsumme im geodätischen Dreieck.

Wenn wir die Bonnetsche Formel auf ein kleines Dreieck, das von geodätischen Linien mit den Winkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  begrenzt wird, anwenden, dann fallen die Beiträge fort, die sich auf die Seiten beziehen, und es bleiben nur die Winkel übrig, aber nicht die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , sondern ihre Supplemente. Unser Ausdruck  $F_b$  wird also

$$\begin{aligned} F_b &= \pi - \alpha_1 + \pi - \alpha_2 + \pi - \alpha_3 - 2\pi \\ &= \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3). \end{aligned}$$

Es wird demnach

$$(1) \quad \int K d\sigma = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi.$$

Diese Formel gibt einen guten Ueberblick über den Zusammenhang zwischen den Gauß'schen Krümmungen auf den Flächen. In der Ebene verschwindet sie, und in der Tat ist dort die Winkelsumme im Dreieck gleich  $\pi$ . Man nennt das Integral, also die Differenz der Winkelsumme gegen  $\pi$ , den Exzess des Dreiecks.

Ist  $K > 0$ , so ist der Exzess positiv, ist  $K < 0$ , so ist er negativ. Man spricht daher von elliptisch und hyperbolisch gekrümmten Flächen. Bei elliptisch gekrümmten Flächen ist die Winkelsumme im geodätischen Dreieck zu gross, bei hyperbolisch gekrümmten Flächen zu klein.

Wenden wir diese Betrachtungen insbesondere auf die Kugel an, so haben wir es dort mit Grosskreisdreiecken zu tun. Dort wird der Exzess proportional der Oberfläche des Dreieckes. Daraus lässt sich ableiten, dass es auf einer Kugeloberfläche keine Ähnlichkeitsgeometrie geben kann, denn Dreiecke, die verschiedene Seitenlängen haben, haben verschiedenen Inhalt und können also nicht dieselbe Winkelsumme haben, also nicht ähnlich sein.

## 2.) Analogie zur Definition der Krümmung in der Ebene.

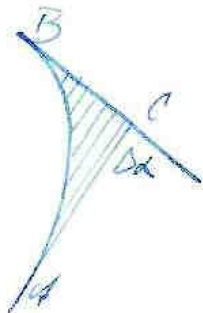
Denken wir in der Ebene zwei Tangenten an eine Kurve gelegt. Dann ist die Krümmung

$$(2) \quad \frac{1}{r} = - \lim \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}.$$

Wir behaupten nun, dass wir auf einer beliebigen Fläche genau so verfahren können bei geodätischen Kurven. Wir haben ja schon davon gesprochen, ob es möglich wäre, dass ein Individuum, das nur auf geodätischen Linien messen kann, die geodätischen Krümmung finden kann. Und wir haben da jetzt die Lösung: Man mache den Grenzübergang. Das kann man aus der Bonnetschen Formel sofort ableiten, allerdings mit einer kleinen Inkorrektheit. Es ist nach der Bonnetschen Formel

$$(3) \quad \int K ds = -F_0 = \int \left( \frac{1}{R_0} ds + \Delta \alpha \right);$$

denn an den Spitzen bei A und B (s. Fig. 28) tritt



Figur 28.

jedesmal der Winkel  $\pi$  auf, so dass die Summe  $2\pi$  sich gegen  $2\pi$  in der Formel hebt. Wir operieren nun auf Bögen, auf denen die geodätische Krümmung ihr Vorzeichen nicht ändert. Dann können wir die beiden Integrale in (3) abschätzen nach dem Mittelwertsatz. Sei  $K_0$  der Mittelwert der Gaussischen Krümmung und  $\frac{1}{R_0}$  ein Mittelwert der geodätischen Krümmung:<sup>1)</sup>

$$(4) \quad K_0 \Delta s = \frac{1}{R_0} \Delta s + \Delta \alpha.$$

Diese Gleichung, die noch nichts vom unendlich Kleinen enthält, dividieren wir durch  $\Delta s$ :

$$(5) \quad \frac{K_0 \Delta s}{\Delta s} = \frac{1}{R_0} + \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}.$$

Lassen wir nun den Bogen gegen Null gehen, dann verschwindet auch  $\Delta s$ .  $K_0$  bleibt eine endliche Grösse, und da  $\Delta \alpha$  von der Grössenordnung  $\Delta s^2$  verschwindet, geht die ganze linke Seite gegen Null. Wir erhalten also in der Grenze

Wir wählen deshalb nicht die symmetrischere Schreibweise  $K_0$  und  $\frac{1}{R_0}$ , weil ja die Mittelwerte nicht an derselben Stelle genommen werden brauchen.

$$(6) \quad \frac{1}{\rho_g} = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \kappa}{\Delta s} .$$

Das Minuszeichen rührt daher, dass unsere betrachtete Kurve, wenn sie in positivem Sinne durchlaufen wird, immer links von ihrer Tangente liegt.

An dieser Betrachtung ist nun zweierlei ungenau. Einmal muss noch exakt nachgewiesen werden, dass

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{D}{\Delta s} = 0$$

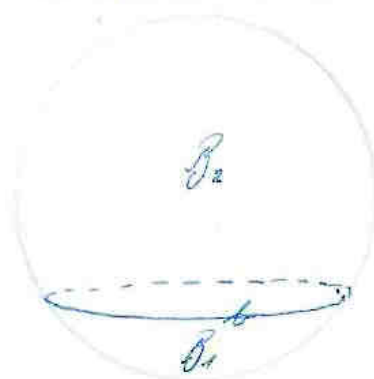
ist, zum andern muss noch gezeigt werden, dass, wenn wir von zwei benachbarten Punkten einer Kurve geodätische Linien ziehen, sie sich in hinreichender Nähe der Kurve ~~nicht~~ schneiden. Um die letzte Tatsache zu beweisen, wird man wieder auf die Tangentialebene projizieren. Dann gehen die geodätischen Linien AC und BC in ebene Kurven über, die sich nur sehr wenig von geraden Linien unterscheiden, denn bei der Projektion ändert sich, wie wir schon nachgewiesen haben, die Krümmung nur sehr wenig. Von zwei Geraden in der Ebene wissen wir nun aber, dass, wenn sie Tangenten an eine Kurve in zwei benachbarten Punkten sind, sie sich in hinreichender Nähe der Kurve, wenn diese selbst nicht allzu wilde Krümmungsverhältnisse hat, ~~nicht~~ schneiden.

### §63: Geometrie im Grossen.

Wir werden über die Geometrie im Grossen später noch ausführlich zu sprechen haben. Wir nehmen hier aber im Rahmen der Anwendungen der Bonnetschen Formel schon etwas vorweg. Wir wollen sie auf die Kugel anwenden:

#### 1.) Das Integral der Krümmung auf der Kugel.

Wir denken uns auf der Kugel irgendeine Kurve endlicher



Figur 29.

geodätischer Krümmung, z.B. einen Breitenkreis gezogen. Die durch diese Kurve auf der Kugel gekennzeichneten beiden Gebiete seien  $B_1$  und  $B_2$ , die Kurve selbst sei  $b$ . Dann können wir auf jedes der beiden Gebiete die Bonnetsche Formel anwenden, denn wir können  $b$  über jedes der beiden Gebiete hinweg auf einen Punkt zusammenziehen. Es gelten also die beiden Gleichungen

$$(1) \quad F_{B_1} + \int_{B_1} K d\sigma = 0,$$

$$(2) \quad F_{B_2} + \int_{B_2} K d\sigma = 0.$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, so folgt

$$(3) \quad F_{B_1} + F_{B_2} + \int_{\text{Kugel}} K \, d\sigma = 0.$$

Dabei brauchen wir keine Winkel zusammzusetzen, weil wir die Kurve hinreichend differenzierbar angenommen haben. Aber auch Winkel würden, wie wir noch zeigen werden, nichts ausmachen. Das Integral  $\int_{\partial B} ds$  ist nun für beide Gebiete  $B_1$  und  $B_2$  in positivem Sinne über die Begrenzungskurve  $b$ , die ja für beide Gebiete dieselbe ist, zu erstrecken. Das heisst aber, dass die Kurve  $b$  zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird, dass sich also die beiden Linienintegrale fortheben. Wenn etwa noch Winkel auftreten würden, so würden auch sie zweimal mit entgegengesetztem Vorzeichen durchlaufen, würden sich also auch fortheben. Es bleibt also nur noch

$$(4) \quad \boxed{\int_{\text{Kugel}} K \, d\sigma = 4\pi}$$

Das Merkwürdige ist, dass in dieser Gleichung nichts mehr von einer Kurve steht. Da liegt es nun nahe, und überhaupt von den immer noch vorhandenen Spezialitäten frei zu machen, also uns insbesondere von der Kugel freizumachen und die Formel (4) topologisch zu erweitern.

## 2. Topologische Erweiterung.

Topologie ist die Lehre von denjenigen Eigenschaften geometrischer Gebilde, die sich nicht ändern, wenn man das Gebilde einer Deformation unterwirft, die punkttreu ist. Wenn man nun die Kugel umkehrbar eindeutig und stetig deformiert, dann behaupten wir, dass auch dann immer noch unsere Formel (4) für den deformierten Körper gilt. Um das zu beweisen, brauchen wir nur daran zu denken, wie wir sie abgeleitet haben. Wir können ja o.B.d.A. als trennende Kurve einen Breitenkreis nehmen. Dann bleibt bei einer topologischen Transformation der Umlaufssinn der Kurve erhalten. Es gelten also alle Überlegungen, die wir angestellt haben, auch noch nach der Deformation. Es kann sich also das Flächenintegral  $\int K \, d\sigma$  nicht ändern. Wir haben nun die Voraussetzung gemacht, dass es eine geschlossene Kurve gibt, die eine endliche geodätische Krümmung aufweist, und die die Fläche in zwei Gebiete teilt, deren gemeinsamer Rand sie ist. Daraus folgt dann ganz von selbst die Umlaufseigenschaft, die wir oben



benutzt haben. Wir erhalten also:

Das Integral  $\int_K \omega$  ist eine topologische Invariante.

Dass daraus, dass die Kurve gemeinsamer Rand der beiden Gebiete ist, folgt, dass sie in entgegengesetztem Sinn durchlaufen wird, erkennt man leicht daraus, dass man über die Kurve hinweg an einer Stelle ein Rechteck legt.



Figur 30.

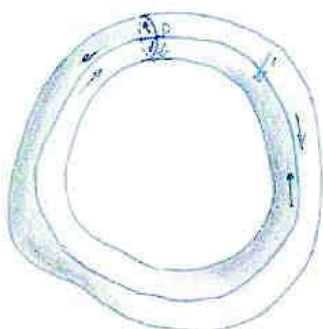
Dann wird dieses Rechteck in zwei Teile zerlegt. Durchlaufen wir die Kurve in einem festen Sinn, dann ergeben sich für die beiden Teile des Rechteckes verschiedene Umlaufsinne. Durchlaufen wir umgekehrt die beiden Rechtecke in demselben Sinn, so wird die Kurve zweimal in entgegengesetztem Sinn durchlaufen.

Wir haben also bewiesen:

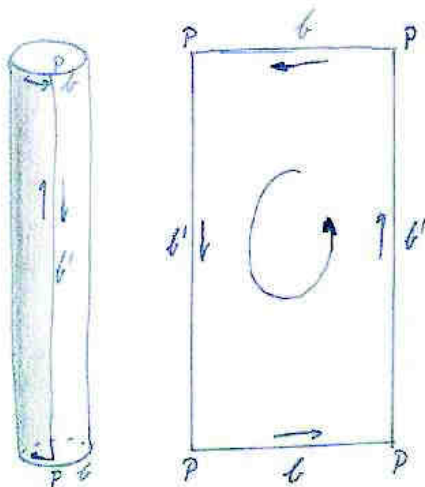
Für jede Fläche, die sich umkehrbar eindeutig und stetig auf die Kugel deformieren lässt, gilt Formel (4).

### 3. Ringflächen.

Ein interessantes Beispiel für die Anwendung der



Bonnetschen Formel sind die Ringflächen. da können wir auch eine geschlossene Kurve, etwa die Kurve  $b$  ziehen und nun den Integrationsprozess vornehmen wollen. Das ist aber nicht erlaubt; denn einmal trennt diese Kurve die Ringfläche nicht in zwei getrennte Gebiete, dann aber lässt sich die Kurve  $b$  nicht auf einen Punkt zusammenziehen. Da kann man sich nun so helfen:



Figur 31.

Wir nehmen einen beliebigen Punkt auf  $b$  an,  $P$ , und legen nun eine zweite Kurve um die Ringfläche, etwa in der in der Figur 31 angegebenen Weise. Diese Kurve sei  $b'$ . Dann behaupten wir, dass dadurch eine Fläche entsteht, die sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Wir können nämlich die Ringfläche in  $b$  aufschneiden und zu einem Zylinder ausstrecken. Das ist eine topologische Defor-

mation. Diesen Zylinder können wir nun wieder längs  $b'$  aufschneiden und kommen dadurch zu einem Rechteck, dessen Seiten  $bb'b'b$  sind, und dieses Rechteck ist in der Tat eine geschlossene Fläche, die sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Denken wir uns nun diesen Prozess wieder rückgängig gemacht, dann ist auch auf der Ringfläche die Kurve  $bb'b'b$  eine für die Integration zulässige Kurve. Und nun sehen wir, dass jede Kurve zweimal in entgegengesetztem Sinn durchlaufen wird. Es bleibt für  $F_{b+b'}$  nur etwas übrig, was sich auf die Winkel bezieht. Nennen wir den gesamten Kurvenzug  $s$ , so gilt

$$(5) \quad F_s + \int K \, d\sigma = 0,$$

Man sieht nun sofort, dass  $F_s$  aus vier Aussenwinkeln besteht, nämlich aus denen, die bei  $P$  auftreten. Die haben aber die Summe  $2\pi$ . Also wird

$$F_s = \sum_{i=1}^4 (\pi - \alpha_i) - 2\pi = 4\pi - 2\pi - 2\pi = 0.$$

Wir finden also:

Auf jeder Ringfläche gilt

$$(6) \quad \int K \, d\sigma = 0.$$

Und damit gilt diese Formel auch für alle Flächen, die durch stetige eineindeutige Deformation aus einer Ringfläche hervorgehen.

Das Charakteristische an unserer Zerlegung der Ringfläche war, dass wir zwei Schnitte gelegt haben,  $b$  und  $b'$ , die sich beide einzeln wohl nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen, die sich nur in  $P$  treffen. Wir behaupten nun folgendes:

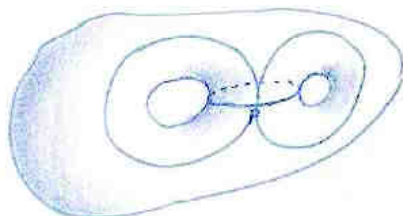
Wenn wir einen beliebigen Schnitt  $b''$  über die Ringfläche legen, dann ist er entweder auf einen Punkt zusammenziehbar, oder aber er trifft  $b$  oder  $b'$  oder beide.

$b$  und  $b'$  sind geschlossene Kurven und lassen sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen. Die Kurve  $b''$  wird bei der Deformation auf die Ebene entweder ganz in dem Rechteck verlaufen, oder aber sie wird mindestens zwei der Seiten schneiden. Im ersten Fall lässt sich dann die Kurve umkehrbar eindeutig und stetig auf die Seiten des Rechteckes deformieren, im zweiten Falle aber ebenso, denn sie muss ja schliesslich wieder in den Punkt  $P$  zurückkommen.

## 4. Brezel- oder Henkelflächen.

Wir können diese Verhältnisse noch topologisch verallgemeinern. Wir denken uns eine Fläche, die wir etwa durch Ansetzen eines "Henkels" an eine Kugel entstanden denken können. Wir suchen dann die Kurven, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Die drei auftretenden

✗



Figur 32.

Typen sind in Figur 32 eingezeichnet. Bilden wir das Integral  $F$  für einen Umlauf über die drei Kurven, von denen sich auch ähnlich wie bei der Ringfläche zeigen lässt, dass sie sich zu einem Polygonzuge auf die Ebene zerren lassen, so bekommen wir einen Beitrag, der nur von der Anzahl  $q$  der Bögen abhängt. Wir erhalten für  $F$

$$(7) \quad F = \sum_1^{2q} (\pi - \alpha_i) - 2\pi = (2q - 4) \pi.$$

Wir erhalten also allgemein

$$(8) \quad (2q - 4) \pi + \Omega_1 = 0$$

Diesen Schluss kann man auch umkehren. Es wäre doch denkbar, dass, wenn wir von einem anderen Punkte als  $P$  ausgehen, sich etwas Anderes ergibt. Wir wissen ja, dass das System, das wir benutzen, geeignet ist,  $\Omega_1$  auszudrücken. Nun hängt aber  $\Omega_1$  wiederum nur von der ganzen Fläche ab. Einerseits hängt  $\Omega_1$  nur von dem Orte ab, von dem aus wir die Fläche zerschneiden, andererseits muss die Zerschneidung eine innere Angelegenheit der Fläche sein, die nicht von der besonderen Wahl des Punktes  $P$  abhängt. Es ist also die Zerschneidung von der speziellen Wahl des Punktes unabhängig.

Es hat nun nach (8)  $\Omega_1$  allgemein die Gestalt

$$(9) \quad \Omega_1 = (4 - 2q) \pi.$$

Für die Kugel ist die Anzahl der Schnitte, die nicht auf einen Punkt deformierbar sind, Null, dort erhalten wir für  $\Omega_1$  also den Wert  $4\pi$ , und das ist kein neues Ergebnis. Für eine Ringfläche war  $q = 2$ , also wird  $\Omega_1 = 0$ , wie wir schon gesehen haben. Bei der Henkelfläche wird also  $\Omega_1 = -2\pi$ , usw. Es nimmt also  $\Omega_1$  mit zunehmender

Anzahl nicht auf einen Punkt zusammenziehbarer Schnitte ab.

Man interessiert sich nun für folgende Frage:

Es sei eine Fläche gegeben, die hyperbolische Metrik trägt. Gibt es eine geschlossene Fläche, die rein hyperbolische Metrik trägt?

Man sieht da nun sofort, welche Möglichkeiten entstehen können. Es kann keine Fläche diese Eigenschaft haben, die von dem Geschlecht der Kugel wäre.<sup>1)</sup> Es müssen an die Kugel mindestens zwei Henkel angesetzt werden, damit hyperbolische Metrik verwirklicht wird.

Bei einer beliebigen Fläche ist es unmöglich, über die ganze Fläche hinweg hyperbolische Metrik, also  $K < 0$ , durchzuführen. Es gibt immer Stellen, wo die Fläche konvex, also die Krümmung positiv wird.

Man kann nun eine Fläche vorschreiben mit immer negativer Krümmung und sie, ohne sich um euklidische Geometrie zu kümmern, fortsetzen; man spricht dann - wobei man sich dann natürlich zumeist in nichteuklidischen Räumen bewegt, von orientierten Flächen konstanter negativer Krümmung. Sie sind dann orientiert, wenn es möglich ist, einen Umlaufssinn einzuführen und ihn über die ganze Fläche hinweg aufrechtzuerhalten. Eine Fläche,



Figur 33.

bei der das nicht möglich ist, ist in Figur 33 wiedergegeben. Es ist unmöglich, die Fläche in einfach zusammenhängende Teile zu zerlegen, die so beschaffen sind, dass, wenn zwei benachbarte Flächen in demselben Sinne durchlaufen werden, die gemeinsame Kante zweimal in entgegengesetzter Richtung durchfahren wird.

---

## 2. Kapitel: Abbildungen der Flächen aufeinander.

---

### §64: Gaussische Koordinaten.

Wir gehen nun dazu über, innere Geometrie auf einer Fläche zu treiben unter der Voraussetzung, dass die

Man nennt nach Riemann das Geschlecht einer Fläche die Anzahl  $g$ , von der schon die Rede war.

Gaussische Krümmung konstant ist. Da führen wir zunächst Gaussische ~~Viviani~~ Koordinaten auf der Fläche ein. Die Gaussische Krümmung ist gegeben durch den Ausdruck

$$(1) \quad K = - \frac{B_{uu}}{B},$$

und das Linienelement ist unter Zugrundelegung Gaussischer Koordinaten gegeben durch

$$(2) \quad ds^2 = du^2 + B^2 dv^2.$$

Wir führen nun die Gaussischen Koordinaten gleich so ein: Wir gehen aus von einer geodätischen Linie der Fläche,  $u=0$ . Dann sollen  $v = \text{const}$  geodätische Linien sein, die senkrecht von  $u = 0$  ausstrahlen. Wir können es nun noch so einrichten, dass für  $u = 0$  die Bogenlänge verschwindet, dass also wird

$$(3) \quad v = \text{arc}(u=0)$$

Ferner können wir für  $u = 0$  auch  $B = 0$  setzen. Dann ist für  $u = 0$

$$ds^2 = B^2 dv^2,$$

oder

$$B = \frac{ds}{dv}$$

und, da wir  $v$  als Bogenlänge auf  $u = 0$  wählen wollen,

$$(4) \quad B = 1$$

Also wird

$$(5) \quad B_v = 0.$$

Wir behaupten auch

$$(6) \quad B_u = 0.$$

Wir haben früher für das geodätische Bogenelement

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2$$

die Formel abgeleitet:

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A_v|}{AB}$$

für den Fall, dass wir auf  $v = \text{const}$  operieren. Dann ist ganz entsprechend, wenn wir auf  $u = \text{const}$  operieren

$$(7) \quad \left| \frac{1}{f_g} \right| = \frac{|B_u|}{AB}.$$

Da nun  $u = 0$  geodätisch sein soll, muss dort der Ausdruck (7) verschwinden, also ist in der Tat (6) erfüllt.

Wir fassen nun die Gleichung (1) erst einmal bei festem  $v$  ins Auge. Wir denken also für  $v$  eine feste Zahl gegeben. Wir schreiben die Gleichung um in die Gestalt

$$(8) \quad B_{uu} + K B = 0.$$

Wir wissen nun aus der Theorie der Differentialgleichungen, dass diese Gleichung zwei Typen von Lösungen hat je nach dem, was für ein Vorzeichen  $K$  hat. Für  $K > 0$  ist die Lösung eine trigonometrische Funktion, für  $K < 0$  eine Exponentialfunktion. Wir machen die Fallunterscheidung:

$$1. \underline{K > 0.}$$

Dann heisst der Lösungsansatz der Gleichung (8)

$$(9) \quad B = a \cos \lambda u + b \sin \lambda u.$$

Aus

$$B_{uu} = -\lambda^2 B$$

ergibt sich  $\lambda$  zu

$$\lambda = \sqrt{K}.$$

Für  $u = 0$  muss  $B = 1$  sein. Da verschwindet der Sinus, und wir erhalten

$$a \cos 0 = 1$$

also

$$a = 1$$

Aus

$$B_u = -\lambda a \sin \lambda u + \lambda b \cos \lambda u = 0$$

folgt für  $u = 0$

$$b = 0,$$

so dass wir also endlich als Lösung der Gleichung (8) erhalten

$$(10) \quad B = \cos (\sqrt{K} u).$$

Es ist also  $B$  von  $v$  unabhängig.

Wenn wir nun die Werte von  $u$  beliebig vorgeben, ändert sich die Sache folgendermassen ab: Wenn wir  $v$  als Bogen-

Länge auf  $u = 0$  wählen, dann hängt  $B_u$  nur von der geometrischen Vorgabe der Kurve ab.  $B_u$  spielt nun eine Rolle bei der Bestimmung der Konstanten  $a$  und  $b$ . Es geht also auch  $\frac{1}{\rho_g}$  auf der Kurve  $u = 0$  in die Bestimmung der Konstanten ein. Und  $\frac{1}{\rho_g}$  ist eine Funktion von  $v$ . Es wird also im allgemeinen in  $a$  und  $b$  eine Funktion von  $v$  zu suchen sein. Die allgemeine Lösung heisst also

$$B = a(v) \cos \lambda u + b(v) \sin \lambda u .$$

Eine weitere Folgerung, die wir aus unseren Formeln ziehen, ist diese: Wenn wir eine Fläche konstanter positiver Krümmung vorgegeben haben, so gibt es  $\infty^3$  Abbildungen des Flächenstückes auf sich; denn wir können die Abbildung in jedem beliebigen Flächenpunkt ( $\infty^2$ ) in jeder Richtung ( $\infty^1$ ) ausführen. Das ergibt also  $\infty^3$  Freiheitsgrade. Eine Fläche dieser Art ist die Kugel, denn die Krümmung ist dort positiv konstant. Es lassen sich also alle Flächen konstanter Krümmung auf  $\infty^3$  Weisen auf die Kugel mit entsprechendem Radius abbilden. Andererseits folgt nun daraus, dass, ein Punkt mit Umgebung auf  $\infty^2$  Weisen auf einen Punkt mit Umgebung auf einer Kugel abgebildet werden kann, die Krümmung innerhalb der Umgebung des Flächenpunktes konstant sein muss.

2.) Es sei  $K = c = 0$ .

Dann heisst die Differentialgleichung

$$(11) \quad B_{uu} = 0$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$(12) \quad B = a(v) u + b(v) .$$

Wählen wir wieder wie im ersten Falle  $v$  als Bogenlänge auf der Linie  $u = 0$ , so wird  $b = 1$ . Ferner muss für  $u = 0$   $B_u$  verschwinden, so dass  $a = 0$  sein muss. Wir erhalten also als Lösung in diesem Falle

$$B = 1 ,$$

also

$$(13) \quad ds^2 = du^2 + dv^2 ,$$

haben also ein ebenes kartesisches Koordinatensystem vor uns.

3.) Es sei  $c < 0$ .

Dann können wir o.B.d.A.  $c = -1$  setzen, denn wir können ja eine Fläche immer, ohne ihre innere Geometrie zu ändern, vergrößern in irgendeinem Verhältnis. Dann heißt die Differentialgleichung

$$(14) \quad E_{uu} = B .$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$(15) \quad B = a(v) e^u + b(v) e^{-u} .$$

Für  $u = 0$  ergibt sich  $B = 1$ , also

$$(16) \quad 1 = a(v) + b(v) .$$

Ferner ist  $B_u = 0$ , also für  $u = 0$

$$(17) \quad a - b = 0 .$$

Aus (16) und (17) folgt dann

$$(18) \quad a = b = \frac{1}{2} .$$

Es wird also

$$(19) \quad B = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u}) = \cosh u$$

und das Linienelement nimmt die Gestalt an

$$(20) \quad ds^2 = du^2 + \cosh^2 u dv^2 .$$

Wir sehen also, dass, wenn  $a$  und  $b$  beliebige Funktionen von  $v$  sind, diese drei Lösungen immer Flächen konstanter Gaußscher Krümmung darstellen.

---



### §65: Die geodätische Abbildung.

Wir wollen nun eine Reihe von Ueberlegungen anstellen, die die Beziehungen der Flächen konstanter Gaussischer Krümmung zur nichteuklidischen Geometrie betreffen.

Die Flächen konstanter Krümmung haben mit den Ebenen die Eigenschaft gemeinsam, dass sie  $\infty^3$  längen- und winkeltreue Abbildungen auf sich gestatten. Und es sind die einzigen Flächen dieser Art. Die Konstruktion liess sich, wie wir schon angaben, willkürlich durchführen. Die Existenz der Bewegungsgruppe ist nun gerade das Leitmotiv der nichteuklidischen Geometrie. Man betrachtet die projektive Ebene, auf der die Geraden definiert sind, und versucht gewissermassen, diesen Gebilden künstlich eine Metrik aufzuprägen, so dass es möglich wird, längentreue Abbildungen der Fläche auf sich zu bestimmen. Es zeigt sich z.B., dass es möglich ist, eine Massbestimmung einzuführen, wenn man von einer Ellipse ausgeht, falls man als Längen gewisse Doppelverhältnisse betrachtet.

Den vollen Zusammenhang dieser Dinge können wir hier nicht geben, weil wir zu dem Zwecke zu viel Axiomatik treiben müssten. Wenn wir von vorneherein annehmen, dass wir es mit Flächen zu tun haben, auf denen wir eine Metrik in Linienelementen von unserem Typus eingeführt haben, dann wissen wir schon, dass die einzigen Lösungen die Flächen konstanter Gaussischer Krümmung sind. Betrachten wir nun nur die Flächen konstanter positiver Gaussischer Krümmung, so wissen wir also, dass sie längentreu auf die Kugel abgebildet werden können. Von der Kugel aber wissen wir, dass sie ein Bild für die elliptische Geometrie liefert.

Nun handelt es sich für uns darum, die Flächen konstanter negativer Gaussischer Krümmung ins Auge zu fassen. Da erledigen wir zuerst folgende Vorfrage: Wenn man von der projektiven Geometrie aus zur nichteuklidischen gelangen

will, dann geht man von den geraden Linien aus und misst auf ihnen die Entfernungen. Wir werden also verlangen, dass, wenn die Flächen konstanter Krümmung mit der nicht-euklidischen Geometrie zusammenhängen sollen, die geodätischen Linien auf diesen Flächen sich auffassen lassen wie die Geraden in der Ebene. Wir werden also untersuchen, ob es möglich ist, die geodätischen Linien als Geraden in der projektiven Ebene aufzufassen.

Dieses Problem kann man leicht allgemeiner fassen. Es ist ein Problem der geodätischen Abbildungen. Wir stellen allgemein die Frage: Lässt sich die Gesamtheit aller der Flächen angeben, deren geodätische Linien sich im Kleinen auf die Geraden der Ebene abbilden lassen, d.h. auf die geodätischen Linien der Ebene? Man erkennt leicht, dass diese Fragestellung ein Spezialfall der allgemeineren ist: Gegeben sind zwei Flächen  $F$  und  $G$ , gesucht ist eine Abbildung im Kleinen, die geodätische Linien in geodätische Linien überführt. Das Charakteristische an dieser neuen Problemstellung ist, dass sie viel tiefer geht als die nach der längentreuen Abbildung. Es gibt, wie wir schon erwähnten, Transformationen, die geodätische Linien in ebensoartige überführen, die aber keineswegs längentreu sind.

Wir verlassen hier die allgemeinere Theorie <sup>1)</sup> und wollen sie vielmehr für den Fall durchführen, dass  $G$  eine Ebene ist. Dann heisst also die Frage: Welche Flächen besitzen die Eigenschaft, dass ein hinreichend kleines Flächenstück sich auf ein solches der Ebene umkehrbar eindeutig abbilden lässt so, dass die geodätischen Linien der Fläche in die Geraden der Ebene übergehen?

Das dieses Problem tatsächlich mit den Axiomen der

---

(1) Näheres siehe Darboux, Theorie des Surfaces.

Geometrie zusammenhängt, erkennen wir an folgendem:

Man kann über die Geraden der Ebene eine Reihe von Sätzen aussprechen, ohne eine eigentliche Metrik heranzuziehen, z.B. dass durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist, dass sich zwei Geraden im Endlichen in nur einem Punkte schneiden, usw. Das sind Axiome, die auch für die geodätischen Linien gelten. Nun lehrt aber die Geometrie gleich eine Spezialität der Geraden, die Gültigkeit des Satzes von Desargues<sup>1)</sup>. Das ist ein Satz, von dem wir nicht erwarten können, dass er auch für geodätischen Linien noch richtig sei.

Wir wollen nun folgenden Satz beweisen:

Die Gesamtheit aller Flächen, die sich geodätisch auf die Ebene abbilden lassen, sind die Flächen konstanter Gaußscher Krümmung. Sie sind also die einzigen Flächen, für welche die projektive Geometrie gilt, wenn man den Begriff der Geraden durch den der geodätischen Linie ersetzt.

Es ist bisher noch nicht gelungen, für diesen Satz einen rein geometrischen Beweis zu liefern. Wir geben nur den analytischen Beweis.

Zunächst suchen wir nach einer notwendigen Bedingung. Dazu setzen wir voraus, die Fläche  $F$  sei geodätisch abbildbar auf die Ebene  $e$ . Aus dieser Voraussetzung muss sich dann die notwendige Bedingung ergeben. Wir benutzen wieder Gaußsche Koordinaten. Das ist erlaubt, wenn wir ein hinreichend kleines Flächenstück betrachten. Aus unserer Voraussetzung folgt, wenn wir in der Ebene  $e$  ein kartesisches

1) Wenn sich die Ecken zweier Dreiecke so einander zuordnen lassen, dass sich die drei Verbindungslinien je zweier entsprechenden Ecken in einem Punkte schneiden, so liegen die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden.

Koordinatensystem  $x, y$  einführen, dass es möglich ist, dieses System so zu wählen, dass die geodätischen Linien des Gauß'schen Systemes in die Geraden übergehen, dass also etwa die geodätischen Linien  $v = \text{const}$  in die Geraden  $y = \text{const}$  übergehen. Damit ist nun aber nicht gesagt, dass die Orthogonaltrajektorien  $u = \text{const}$  in die Geraden  $x = \text{const}$  übergehen; denn dazu wäre Winkeltreue der Abbildung erforderlich, die wir nicht vorausgesetzt haben. Wir können über die Bildkurven der Linien  $u = \text{const}$  nichts Näheres aussagen; es ist irgendeine Kurvenschar in der Ebene, die die Schar  $y = \text{const}$  durchsetzt.

Wir führen nun in der Ebene das der Fläche entsprechende Parameternetz  $u, v$  ein. Dabei werden die Geraden  $u = \text{const}$  mit den Geraden  $y = \text{const}$  zusammenfallen; die kartesische Koordinate  $x$  wird irgendeine Funktion von  $u, v$  werden:

$$(1) \quad x = x(u, v).$$

Wir wissen nun, dass alle geodätischen Linien der Fläche  $F$  in gerade Linien der Ebene  $e$  übergeführt werden. Eine Gerade ist nun in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$(2) \quad ax + by + c = 0.$$

Also wird für uns die Gleichung dieser Geraden heißen

$$(3) \quad a x(u, v) + b v + c = 0,$$

wobei  $a$  und  $b$  irgendwelche Konstanten sind. Wir denken nun  $v$  als Parameter auf der geodätischen Linie gewählt. Dann wird  $x$  eine Funktion von  $v$  allein, und wir erhalten aus (3) durch zweimaliges Differenzieren nach  $v$  für  $a \neq 0$

$$(4) \quad x'' = 0.$$

Es ist also die geodätische Linie in der Ebene durch diese Gleichung (4) gegeben. Es ist nun

$$x' = x_u u' + x_v ,$$

also

$$x'' = x_u u'' + x_{uu} (u')^2 + 2 x_{uv} u' + x_{vv} ;$$

also erhalten wir als Differentialgleichung der geodätischen Linie

$$(5) \quad x_u u'' + x_{uu} (u')^2 + 2 x_{uv} u' + x_{vv} = 0 .$$

Nun haben wir aber in §59 als Differentialgleichung der geodätischen Linie gefunden

$$\S 59, (21) \quad u'' = u'^2 \frac{G_u}{G} + u' \frac{G_v}{2G} + \frac{G_u}{2} ,$$

oder wegen

$$G = B^2, \quad G_u = 2 B B_u, \quad G_v = 2 B B_v, \\ \frac{G_u}{G} = 2 \frac{B_u}{B}, \quad \frac{G_v}{G} = 2 \frac{B_v}{B}$$

$$(6) \quad u'' = 2 \frac{B_u}{B} u'^2 + \frac{B_v}{B} u' + B B_u .$$

Setzen wir (6) in (5) ein, so folgt

$$2x_u \frac{B_u}{B} u'^2 + \frac{B_v}{B} x_u u' + B B_u x_u + x_{uu} (u')^2 + 2x_{uv} u' + x_{vv} = 0$$

oder

$$(7) \quad u'^2 (x_{uu} + x_u \frac{2B_u}{B}) + u' (2x_{uv} + x_u \frac{B_v}{B}) + x_{vv} + x_u B B_u = 0 .$$

Diese Gleichung muss nun für alle ~~kurve~~ Kurven Linien, die durch einen Punkt gehen, in diesem Punkte gelten. Sie muss also für alle Werte von  $u'$  gelten. Damit das aber der Fall ist, ist notwendig und hinreichend, dass die Koeffizienten von  $u'$  und  $u'^2$  verschwinden. Dann muss aber auch der Rest verschwinden, und wir erhalten also die drei notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$(8) \quad x_{uu} + 2 x_u \frac{B_u}{B} = 0 ,$$

$$(9) \quad 2x_{uv} + x_u \frac{B_v}{B} = 0 ,$$

$$(10) \quad x_{vv} + x_u B B_u = 0 .$$

Das sind drei partielle Differentialgleichungen für die beiden Unbekannten  $x$  und  $y$ . Das System ist also überbestimmt, muss also eine Integrabilitätsbedingung enthalten. Und gerade die suchen wir. Es wird eine Gleichung für  $B$  sein.

Die beiden Gleichungen (8) und (9) bringen wir in die Gestalt

$$(11) \quad \frac{x_{uu}}{x_u} = -2 \frac{B_u}{B} ;$$

$$(12) \quad \frac{x_{uv}}{x_u} = -\frac{1}{2} \frac{B_v}{B} .$$

Und diese beiden Gleichungen lassen sich wieder schreiben

$$(13) \quad (\log x_u)_u = -2 (\log B)_u$$

$$(14) \quad (\log x_u)_v = -\frac{1}{2} (\log B)_v .$$

Aus der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen, also aus

$$(\log x_u)_{uv} = (\log x_u)_{vu}$$

folgt dann

$$2 (\log B)_{uv} = \frac{1}{2} (\log B)_{uv}$$

oder

$$(15) \quad (\log B)_{uv} = 0 .$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\log B = \varphi(u) + \psi(v)$$

oder

$$(16) \quad B = e^{\varphi(u)} e^{\psi(v)} = f(u) g(v) .$$

Führen wir diesen Wert für  $B$  in (13) und (14) ein, so folgt

$$\begin{aligned} (\log x_u)_u &= -2 (\log f(u) g(v))_u \\ &= -2 (\log f(u) + \log g(v))_u \end{aligned}$$

also

$$(17) \quad (\log x_u)_u = -2 (\log f(u))_u$$

und entsprechend

$$(18) \quad (\log x_u)_v = -\frac{1}{2} (\log g(v))_v.$$

Aus (17) und (18) folgt nun

$$\log x_u = -2 \log f(u) - \frac{1}{2} \log g(v) + C,$$

oder

$$(19) \quad x_u = \frac{C}{f^2(u) \sqrt{g(v)}}$$

Setzen wir

$$(20) \quad \frac{1}{f^2(u)} = \varphi'(u),$$

so liefert die Integration von (19)

$$x = \int \frac{C}{\sqrt{g(v)}} \varphi'(u) du + h(v) = \frac{C}{\sqrt{g(v)}} \int \varphi'(u) du + h(v),$$

also

$$(21) \quad x = \frac{C}{\sqrt{g(v)}} \int \varphi'(u) du + h(v).$$

Setzen wir (20) in (15) ein, so ist

$$(22) \quad B = \frac{1}{\varphi'(u)} g(v)$$

(21) und (22) setzen wir in (10) ein und erhalten unter Beachtung von

$$x_{vv} = h''(v) + C \varphi \left( \frac{1}{\sqrt{g(v)}} \right)''$$

$$h'' + C \varphi \left( \frac{1}{\sqrt{g(v)}} \right)'' + \frac{C \varphi(u)}{\sqrt{g(v)}} \frac{g'(v)}{\sqrt{g(v)}} \left( -\frac{1}{2} \frac{g'(v)}{\sqrt{g(v)}} \right) \varphi''(u) = 0,$$

oder, wenn wir  $h''$  nach links schaffen und durch  $h''C$  dividieren

$$(24) \quad -\frac{1}{1} = \varphi(u) A(v) + \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} B(v).$$

Differenzieren wir nach  $v$ , so erhalten wir

$$0 = \varphi(u) A'(v) + \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} B'(v),$$

oder

$$(25) \quad \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} = 2 D(v) \varphi(u),$$

oder

$$(26) \quad \varphi''(u) = 2 D \varphi(u) \varphi'(u).$$

Integration nach  $u$  liefert

$$\varphi'(u) = D \varphi^2(u) + E,$$

oder nach (26)

$$\varphi'(u) = D \left( \frac{\varphi''}{2D\varphi'} \right)^2 + E,$$

oder

$$(27) \quad \varphi'(u) = \frac{\varphi''^2}{4D\varphi'^2} + E.$$

Wir führen nun wieder für  $\varphi'$  seinen Wert aus (20) ein.

Es ist

$$f = \frac{1}{\sqrt{\varphi'}} = (\varphi')^{-\frac{1}{2}}.$$

Also wird

$$(\log f)' = \frac{f'}{f} = -\frac{1}{2} \frac{\varphi''}{\varphi'},$$

oder

$$\frac{1}{4} \frac{\varphi''^2}{\varphi'^2} = \left( \frac{f'}{f} \right)^2.$$

Es geht also (27) über in

$$\frac{1}{f^2} = D \frac{f'^2}{f^2} + E,$$

oder

$$\frac{D}{f^2} = \frac{f'^2}{f^2} + d$$

oder

$$f'^2 = D - df^2$$

oder

$$f'' = -df$$

also

$$(28) \quad f'' + df = 0$$

oder

$$g f'' + g f d = 0$$

oder wegen (16)

$$(29) \quad B_{uu} + d B = 0.$$

Damit haben wir aus der Voraussetzung, dass die Fläche geodätisch auf die Ebene abbildbar sei, die Bedingung der Konstanz der Gauss'schen Krümmung abgeleitet.

Es lässt sich nun auch leicht rückwärts überschlagen,



dass diese Bedingung (29) auch hinreichend für die geodätische Abbildbarkeit der Fläche auf die Ebene ist.

Wenn nun allgemein das Problem vorgelegt ist, eine Fläche geodätisch nicht auf die Ebene, sondern auf irgendeine andere Fläche abzubilden, verfährt man im Prinzip genau so. Auch dann bekommt man ein überbestimmtes Gleichungssystem, aus dem man die Bedingung der Abbildbarkeit ableitet. Natürlich bekommt man dann einen allgemeineren Ausdruck als in unserm Falle.

Damit haben wir gewissermassen vom Standpunkte der projektiven Geometrie aus die Abbildung von geodätischen Linien erledigt. Man kann auch sagen, vom Standpunkte der Kartographie aus. In der Tat ist man ja auch von der Kartographie aus auf diese Problemkreise gekommen. Man kann nun aber auch von anderem Gesichtspunkte, nämlich von dem der Winkeltreue, an das Problem der Abbildung herantreten. Und das soll die Aufgabe des nächsten Paragraphen sein.

#### §66: Die winkeltreue Abbildung.

Die winkeltreue Abbildung kann man dahin auffassen, dass infinitesimale Kreise wieder in solche übergeführt werden. Im allgemeinen wird bei einer Abbildung ein Kreis in eine gewisse Ellipse übergehen. Denken wir etwa an die sphärische Abbildung einer Fläche auf die Erdoberfläche. Dann werden die stärksten Abweichungen dieser Art in den Hauptkrümmungsrichtungen liegen.

Die Winkeltreue der Abbildung wirkt sich bei den Kartenprojektionen dahin aus, dass kleine Gebiete unverzerrt wiedergegeben werden. Auf grossen Gebieten kann davon natürlich nicht mehr die Rede sein. Aber ein Gebiet wie Deutschland wird auf einer Merkator Karte noch unverzerrt erscheinen.

Wir beweisen folgenden Satz:

Zwei Flächen  $\Phi$  und  $\Phi^*$  sind dann und nur dann winkeltreu aufeinander abbildbar, wenn ihre ersten Fundamentalformen einander proportional sind.

Wir beweisen zunächst, dass diese Bedingung hinreichend ist. Es sei auf beiden Flächen ein Parameternetz gegeben, das ineinander übergeht,  $u, v$  und  $u^*, v^*$ . Dann ist auf  $\Phi$  der Winkel zwischen zwei Richtungspaaren  $du\delta v$  und  $\delta u\delta v$

$$(1) \quad \cos \varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u\delta v) + G\delta v\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\delta v + G\delta v^2} \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$$

Gehen wir nun zur Fläche  $\Phi^*$  über, so müssen sich nach Voraussetzung  $E, F, G$  mit einem gemeinsamen Faktor multiplizieren:

$$(2) \quad E^* = \lambda E, \quad F^* = \lambda F, \quad G^* = \lambda G.$$

Ersetzen wir in (1) die Fundamentalgrößen durch diese neuen, so multiplizieren sich Zähler und Nenner mit  $\lambda$ , der Wert der rechten Seite bleibt also unverändert. Also ist dann in der Tat die Abbildung winkeltreu.

Wir haben also nur noch zu beweisen, dass die Voraussetzung auch notwendig ist.

Aus

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

folgt

$$(3) \quad \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\lambda},$$

d.h. das Streckungsverhältnis zweier Linienelemente ist unabhängig von der Richtung. Betrachten wir nun einen kleinen Entfernungskreis, so geht der also wieder in einen kleinen Kreis über, und die Radien verhalten sich wie  $1 : \sqrt{\lambda}$ . Es ist also die Bedingung der Proportionalität gleichbedeutend mit der geometrischen Bedingung, dass Kreise in Kreise abgebildet werden. Wir können also unsern Satz auch dahin aussprechen:

Zwei Flächen sind dann und nur dann winkeltreu aufeinander abbildbar, wenn Kreise in Kreise übergeführt werden können.

Jetzt wollen wir zeigen, dass unsere Bedingung auch notwendig ist, dass also aus der Winkeltreue die Proportionalität der ersten Fundamentalform folgt.

Wenn Winkeltreue vorhanden ist, so müssen offenbar orthogonale Richtungen in orthogonale übergehen. Es muss also in (1) die linke Seite in beiden Formen verschwinden. Daraus folgt, dass mit

$$(4) \quad (E \, du + F \, dv) \, \delta u + (F \, du + G \, dv) \, \delta v = 0$$

auch

$$(5) \quad (E^* \, du + F^* \, dv) \, \delta u + (F^* \, du + G^* \, dv) \, \delta v = 0$$

erfüllt ist. Das ist aber nur dann möglich, wenn ihre Determinante verschwindet:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} E \, du + F \, dv & F \, du + G \, dv \\ E^* \, du + F^* \, dv & F^* \, du + G^* \, dv \end{vmatrix} = 0$$

Lösen wir nach  $du$  und  $dv$  auf, so bekommen wir die quadratische Gleichung

$$(7) \quad du^2 \begin{vmatrix} E & F \\ E^* & F^* \end{vmatrix} + du \, dv \begin{vmatrix} E & G \\ E^* & G^* \end{vmatrix} + dv^2 \begin{vmatrix} F & G \\ F^* & G^* \end{vmatrix} = 0$$

~~Diese~~ Diese Gleichung gilt für alle Richtungen  $du$  und  $dv$ ; sie kann also nur dann gelten, wenn alle drei Determinanten auf der rechten Seite von (7) für sich verschwinden. Das heisst aber in der Tat, dass die Fundamentalformen proportional sind.

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir untersuchen nun den besonderen Fall, wann eine Fläche konform auf die Ebene abbildbar ist. In der Ebene wählen wir  $u$  und  $v$  als kartesische Koordinaten. Dann wird dort das Linienelement

$$(8) \quad ds^2 = du^2 + dv^2,$$

d.h. es ist

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Es müssen also die Fundamentalgrößen  $E, F, G$  der Fläche  $\Phi$  den Werten  $1, 0, 1$  proportional sein, d.h. aber es ist

$$(9) \quad E = G = \text{const}, \quad F = 0.$$

Wir setzen nun

$$(10) \quad E = G = \lambda^2$$

Dann wird also das Linienelement der Fläche

$$(11) \quad ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2).$$

Es ist also die Fläche dann und nur dann auf die Ebene winkeltreu abbildbar, wenn ihr Linienelement diese besondere einfache Gestalt hat. Insbesondere folgt daraus, dass die den kartesischen Koordinatenlinien entsprechenden Parameterlinien  $u, v$  der Fläche orthogonal sind. Nur gilt da nicht die Umkehrung, dass jedes orthogonale Netz der Fläche in ein solches der Ebene übergeht.

Man nennt derartige Parameter, die dem Linienelement die Gestalt (11) geben, isotherme Parameter. Die Bezeichnung rührt daher, dass ~~hier~~ in der Wärmelehre bei den Isothermen auf einer Fläche diese Zusammenhänge herauspringen.

Wenn wir also isotherme Parameter auf einer Fläche haben, dann ist eine winkeltreue Abbildung auf die Ebene vorhanden.

Es bleibt uns nun noch übrig, ganz allgemein die winkeltreue Abbildung einer Fläche auf die Ebene zu untersuchen. Wir haben ja bisher nur den Sonderfall des kartesischen Netzes untersucht. Da sehen wir nun folgendes: Es genügt, alle Abbildungen einer Fläche auf sich selbst zu studieren; denn da die Abbildungen umkehrbar eindeutig sind, gehört zu jeder Abbildung  $\Phi \rightarrow e$  eine solche  $e^* \rightarrow \Phi \rightarrow e$ . Wir können also die Abbildung  $e^* \rightarrow e$  betrachten. Das hat seine Verallgemeinerung für die Abbildungen einer beliebigen Fläche auf sich

selbst. Man kann, anstatt die Fläche auf sich selbst abzubilden, sie zuerst auf die Ebene und dann diese wieder auf die Fläche abbilden. Daraus folgt dann schon, dass bei einer winkeltreuen Abbildung einer Fläche auf sich isotherme Parameter in sich übergeführt werden. Wie ist es nun möglich, auf einer Fläche, die irgendwie gegeben ist, isotherme Parameter einzuführen? Dafür wollen wir zwei Theorien entwickeln. Die erste ist deswegen einfacher, weil sie ins Komplexe hinein geht, sie bringt daher aber auch Beschränkungen der Voraussetzungen mit sich. Die andere hat den Vorteil, dass sie im Reellen bleibt, und weniger voraussetzt, dass sie also unter allgemeineren Bedingungen verwendbar ist.

1.)

$E, F, G$  seien analytische Funktionen von  $u, v$ . Die Fläche  $\mathcal{F}$  sei nicht nur für reelle Werte von  $u$  und  $v$  definiert, sondern auch für komplexe; es sei also der kartesische Raum in den komplexen eingebettet. Wir betrachten also als Punkt ein Zahlentripel  $x, y, z$ , wobei diese Zahlen komplex sind. Dabei ist natürlich noch eine offene Frage, ob eine reelle Fläche überhaupt ein Bestandteil einer komplexen Fläche sein muss. Bei allen bisher von uns betrachteten Flächen ist das der Fall, denn sie waren sämtlich nur mit Hilfe der algebraischen und trigonometrischen Funktionen beschrieben, und die besitzen in der Tat eine komplexe Erweiterung.

Im Komplexen steht es nun mit dem Linienelement anders als bisher, Bis jetzt haben wir immer vorausgesetzt, dass es positiv definit ist. Das können wir nun nicht mehr. Insbesondere erschliesst sich dadurch jetzt die Möglichkeit, Linien zu finden, auf denen  $s = 0$  ist. Man nennt derartige Richtungen isotrope Richtungen. Sie hängen mit der konformen Abbildung aufs engste zusammen, wie wir noch sehen werden.

Dividieren wir

$$0 = ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

durch  $dv^2$  und setzen  $\frac{du}{dv} = u'$ , so genügen also die isotropen Linien der Gleichung

$$(12) \quad E u'^2 + 2 F u' + G = 0.$$

Da ergibt sich sofort folgender Satz:

Zwei Flächen sind dann und nur dann konform aufeinander abbildbar, wenn isotrope Richtungen in isotrope Richtungen übergehen.

Dieser Satz ist algebraisch evident; denn Konformität heißt Proportionalität der beiden Formen  $E, F, G$  und  $E^*, F^*, G^*$ . Nun haben zwei Polynome mit proportionalen Koeffizienten dieselben Wurzeln, und umgekehrt haben zwei Polynome mit ~~mit~~ proportionalen Koeffizienten, wenn sie dieselben Wurzeln haben.

Unsere Aufgabe, konforme Abbildungen zu suchen, ist also äquivalent damit, nach solchen Abbildungen zu suchen, bei denen isotrope Richtungen erhalten bleiben. Um das zu können, muss man die isotropen Richtungen bestimmen können. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass wir die Differentialgleichung (12) integrieren. Das kann man mit Hilfe der gewohnten Näherungsmethoden nur im Reellen bewerkstelligen. Es ist nämlich eine bekannte Tatsache der Theorie der Differentialgleichungen, dass es zu jeder gewöhnlichen Differentialgleichung eine analytische Lösungsfunktion gibt. Man setzt  $u$  in eine Potenzreihe an. Dann ergeben sich Rekursionsformeln für die Koeffizienten.<sup>1</sup> Daraus ergibt sich also für uns, dass wir sicher eine analytische Funktion von  $v$  so bestimmen können, wie (12) verlangt. Denken wir also auf diese Weise die isotropen Richtungen bestimmt. Dann können wir eine Schar

<sup>1</sup>) Näheres siehe Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen.

isoproper Richtungen in der Form

$$(13) \quad \varphi(u, v) = \text{const}$$

darstellen. Wir behaupten, dass die zweite Schar isotroper Richtungen (zwei muss es ja geben, weil die Gleichung (12) quadratisch ist) erhalten wird durch

$$(14) \quad \bar{\varphi}(u, v) = \text{const}.$$

Dabei verstehen wir unter  $\bar{\varphi}(u, v)$  die Funktion, die aus  $\varphi(u, v)$  hervorgeht, indem man alle Koeffizienten durch ihre konjugiert komplexen Werte ersetzt.

Aus (13) folgt

$$(15) \quad \varphi_u u' + \varphi_v v' = 0.$$

Wir machen nun davon Gebrauch, dass wir von einer reellen Funktion ausgehen, dass also für reelle Werte von  $u, v$  die Funktionen reell sind. Daraus folgt aber, dass auch  $\bar{u}'$  die Gleichung (11) löst.

Es folgt aus (14)

$$(16) \quad \bar{\varphi}_u \bar{u}' + \bar{\varphi}_v v' = 0.$$

Es ist also  $\bar{\varphi}$  gerade die Fortschreitungsrichtung von  $\bar{u}'$ . Also ist mit  $\varphi = \text{const}$  auch  $\bar{\varphi} = \text{const}$  eine Schar isotroper Parameterlinien auf der Fläche. Wir behaupten, dass es die beiden einzigen solchen Linien sind. Da wir wissen, dass die Gleichung (12), weil sie quadratisch ist, nur zwei Lösungstypen haben kann, haben wir also nur nachzuweisen, dass die beiden Richtungen  $\varphi$  und  $\bar{\varphi}$  nicht zusammenfallen. Das ist aber nur möglich, wenn  $u' = \bar{u}'$  ist, und das kann nicht sein, denn es würde bedeuten, dass  $u$  reell ist.

Wir setzen nun

$$(17) \quad \varphi(u, v) = \text{const} = U$$

$$(18) \quad \bar{\varphi}(u, v) = \text{const} = V.$$

Dann ist also jede Fläche durch zwei Werte  $U, V$  charakterisiert. Diese beiden Werte führen wir als Parameter ein. Das können wir, wenn

$$(19) \quad \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

ist. Den Beweis dieser Tatsache werden wir noch nachholen. Dann geht das Linienelement über in die Gestalt

$$(20) \quad ds^2 = \Lambda^2(U, V) dU dV .$$

Die quadratischen Glieder verschwinden nämlich, weil wir es mir isotermen Richtungen zu tun haben. Es ist nicht schwer, von dieser Form des Linienelementes zu der Form (11) zu kommen. Dann liefert das Linienelement reelle Punkte der Fläche. Das ist aber nur dann der Fall, wenn  $U$  und  $V$  konjugiert komplex sind. Da liegt es nahe zu setzen

$$(21) \quad U = \alpha + i\beta$$

$$(22) \quad V = \alpha - i\beta$$

Lösen wir nach  $\alpha$  und  $\beta$  auf:

$$(23) \quad \alpha = \frac{U + V}{2}$$

$$(24) \quad \beta = \frac{U - V}{2}$$

Es sind also  $\alpha$  und  $\beta$  dann und nur dann reell, wenn  $U$  und  $V$  konjugiert komplex sind. Umgekehrt folgt auch, dass, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  reell sind,  $U$  und  $V$  konjugiert komplex sind. Die beiden Aussagen sind äquivalent.

Dann wird

$$(25) \quad dU dV = d(\alpha + i\beta) d(\alpha - i\beta) = d(\alpha^2 + \beta^2) \\ = d\alpha^2 + d\beta^2 .$$

Ferner geht  $\Lambda(U, V)$  über in  $\lambda(\alpha, \beta)$ , so dass wir also für das Linienelement erhalten

$$(26) \quad ds^2 = \lambda^2(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2)$$



Wir kommen also in der Tat auf dem Umweg über die isothermen Kurven automatisch zu isothermen Netzen auf der Fläche; es ist also die Auffindung der isothermen Richtungen auf die Integration der Gleichungen (16) und (17) zurückgeführt.

Wir haben nur noch nachträglich zu zeigen, dass es gerechtfertigt ist, statt der Parameter  $u, v$  die Werte  $U, V$  einzuführen, dass also die Gleichung (19) erfüllt ist. Es ist

$$(27) \quad \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \bar{\varphi}_u & \bar{\varphi}_v \end{vmatrix} \neq 0$$

zu beweisen. Diese Gleichung ist nun wieder äquivalent mit der schon benutzten Tatsache, dass die Differentialgleichung für die isotropen Richtungen zwei nicht zusammenfallende komplexe Wurzeln hat. Das Verschwinden der Funktionaldeterminante würde ja bedeuten, dass die beiden Formen  $\varphi_u, \bar{\varphi}_u$  proportional den Formen  $\varphi_v, \bar{\varphi}_v$  würden, und das kann nicht sein, da  $u'$  nicht reell ist.

Der in 1.ere Grund dafür, dass man hier die isotropen Richtungen braucht, steckt in der projektiven Definition des Winkels. Wir wissen, dass der Winkel nichts Anderes ist als der Logarithmus des Doppelverhältnisses der beiden betrachteten Kurven gegen die beiden isotropen Kurven. Nun ist jede Abbildung, die differenzierbar ist, im Kleinen projektiv, d. h. bei der Abbildung gehen vier Richtungen durch einen Punkt in vier Richtungen durch einen Punkt über, wobei das Doppelverhältnis erhalten bleibt. Das werden wir noch beweisen. Aus diesem Sachverhalt heraus ist aber sofort klar, warum die isotropen Richtungen eine so grosse Rolle spielen. Es ist dann Orthogonalität äquivalent damit, dass die beiden Richtungen mit den isotropen in harmonischem Doppelverhältnis liegen. Es gehen bei der Abbildung also alle

orthogonalen Richtungspaare in solche über, die harmonisch zu den neuen Isotropen liegen. Ausserdem sollen diese Bilder wegen der Winkeltreue aber wieder orthogonal sein; es folgt also, dass die neuen Isotropen die Bilder der alten sind.

Wir tragen nun den Satz nach:

Jede Abbildung einer Fläche ist im Kleinen projektiv.

Es genügt wieder zu zeigen, dass die Abbildung der Fläche auf die Parameterebene im Kleinen projektiv ist, denn wenn das der Fall ist, so sind auch die Flächen projektiv aufeinander bezogen.

Wir denken an ein Flächenstück die Tangentialebene gelegt. Der Berührungspunkt sei der Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems  $X, Y$  in der Tangentialebene. Dann ist

$$(28) \quad \begin{aligned} x' &= x_u u' + x_v v' \\ y' &= y_u u' + y_v v' \end{aligned}$$

Denken wir nun zwei neue Ebenen konstruiert, in denen die Koordinaten  $x', y'$  bzw.  $u', v'$  sind, und fassen hier das Gleichungssystem (28) so auf,  $x_u, y_u, x_v, y_v$  Konstante,  $x', y', u', v'$  die Variablen sind. Dann ist das Gleichungssystem (28) ein solches mit nicht verschwindender Determinante, vermittelt also eine affine Transformation der einen Ebene auf die andere; d.h. aber insbesondere, dass Geradenbüschel durch den Nullpunkt der einen Ebene projektiv in solche durch den Nullpunkt der anderen Ebene abgebildet werden unter Erhaltung des Doppelverhältnisses. Nun können wir aber die Richtung von Kurven auf der Fläche, die durch einen Punkt gehen, ersetzen durch die Geraden in der Tangentialebene. Es wird also auch ein derartigen Kurvenbüschel auf der einen Fläche projektiv unter Erhaltung des Doppelverhältnisses auf eine andere Fläche übertragen.

Wir haben also gesehen, dass eine Fläche nur dann winkeltreu abgebildet werden kann, wenn die isotropen

Richtungen in Korrespondenz gesetzt werden. In der Ebene sind diese Isotropen die geraden Linien  $x + iy = 0$ .

Wenn wir nun eine Fläche konform auf sich abbilden wollen, so sind zwei Fälle möglich: Entweder gehen die Kurven  $u = \text{const}$  in  $u^* = \text{const}$  und die Kurven  $v = \text{const}$  in  $v^* = \text{const}$  über, oder aber es gehen die Kurven  $u = \text{const}$  in  $v^* = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  in  $u^* = \text{const}$  über. Die all gemeinste Abbildung, die die Scharen erhält, ist

$$(29) \quad u^* = f(u) \quad , \quad v^* = g(v) \quad .$$

Dabei müssen die Funktionen  $f$  und  $g$  komplex erklärt sein. Nun ist die Frage: Wann führt eine derartige Abbildung reelle Punkt in reelle Punkt über? Wir behaupten, dass das nur dann der Fall ist, wenn die beiden Funktionen  $f$  und  $g$  konjugiert zueinander sind. Wir wollen nicht zeigen, dass das notwendig ist, sondern nur dass es hinreichend ist. Es ist

$$\overline{f(x)} = \overline{f(\bar{x})}$$

oder

$$\bar{f}(x) = \overline{f(\bar{x})}$$

Nach Voraussetzung soll sein

$$(30) \quad g(x) = \bar{f}(x) = \overline{f(\bar{x})}$$

Dann wird

$$g(\bar{x}) = \overline{f(x)}$$

und (29) geht über in

$$(31) \quad u^* = f(x) \quad , \quad v^* = \bar{f}(x)$$

Es haben nun fast alle Funktionen, die praktisch auftreten, die Eigenschaft, für reelle Argumente reell zu sein; daraus folgt dann, dass für diese Funktionen gilt

$$(32) \quad \bar{f}(x) = \overline{f(x)}$$

Wir sehen also, dass die konforme Abbildung einer Fläche auf sich durch eine analytische Funktion charakterisiert

wird. Wir können also sagen:

Die Gesamtheit aller analytischen Funktionen einer Variablen ergibt die Gesamtheit aller winkeltreuen Abbildungen einer Ebene auf sich.

Wir behaupten nun, dass diese Abbildungen den Umlaufsinn erhalten. Um das zu zeigen, genügt es, zu zeigen, dass sie sich stetig aus der Identität erzeugen lassen. Man setzt

$$(33) \quad f(u) = t f(u) + (1-t)u$$

Für  $t = 1$  nimmt  $f(u)$  seinen richtigen Wert an, für  $t=0$  ist es die Identität, und dazwischen liegt ein stetiger Übergang.

Die Abbildung

$$(34) \quad U^* = V, \quad V^* = U$$

dagegen kehrt den Umlaufsinn um, denn sie bedeutet

$$\alpha^* = \alpha, \quad \beta^* = -\beta$$

Wenn uns also eine beliebige Abbildung gegeben ist, von der wir wissen, dass sie den Umlaufssinn vertauscht, so zerlegen wir sie in zwei Abbildungen, einmal die Abbildung (34), und die übrigbleibende Funktion muss dann auf jeden Fall den Umlaufssinn erhalten.

Von diesen Überlegungen wollen wir zwei Anwendungen machen.

#### §67: Anwendung auf die Abbildung einer Ebene.

Für die Ebene heisst unsere Frage so: Wir wollen einen Kurvennetz finden, das sich konform auf das kartesische abbilden lässt.

Das Linienelement der Ebene hat die Gestalt

$$(1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = \lambda^2(d\alpha^2 + d^2)$$

Wir führen die isotropen Richtungen

$$(2) \quad U = x + iy, \quad V = x - iy$$

ein, oder in der Schreibweise der Funktionentheorie

$$(3) \quad U = z, \quad V = \bar{z}.$$

Die Abbildung setzen wir in der Form an

$$(4) \quad U^* = f(z), \quad V^* = \bar{f}(\bar{z})$$

Dann geht (1) über in

$$(5) \quad ds^2 = \Delta^2 (dU^{*2} + dV^{*2}).$$

Nun ist

$$(6) \quad dU^* = f'(z) dz, \quad dV^* = \bar{f}'(\bar{z}) d\bar{z}$$

Also wird

$$(7) \quad ds^2 = \Delta^2 ((f'(z))^2 dz^2 + (\bar{f}'(\bar{z}))^2 d\bar{z}^2) \\ = \Delta^2 |f'(z)|^2 dz d\bar{z} = \Delta^2 |f'(z)|^2 (dx^2 + dy^2).$$

und schliesslich

$$(8) \quad \Delta = \frac{1}{|f'(z)|}$$

Es ist also der Uebergang von  $z$  zu  $\bar{z}$  durch den Betrag der Ableitung von  $f(z)$  gegeben.

-----

§68: Poincaré Abbildung der Fläche der Gaussischen Krümmung -1 auf die Halbebene.

Wir wollen eine Abbildung der Fläche mit der Gaussischen Krümmung -1 auf die Ebene angeben. Wir setzen also

$$(1) \quad K = -1.$$

und wählen nun ein Koordinatensystem, in dem das Linienelement durch den Ausdruck

$$(2) \quad ds^2 = du^2 + e^{-2u} dv^2$$

gegeben ist. Dadurch ist die Gleichung

$$(3) \quad B_{uu} = B$$

erfüllt mit

$$(4) \quad B = e^{-u}.$$

Nun müssen wir zunächst ein isothermes Netz einführen.

Wir schreiben (2) in der Gestalt

$$(5) \quad ds^2 = e^{-2u}(e^{2u}du^2 + dv^2).$$

Wir setzen

$$(6) \quad e^u = y.$$

Dann geht (5) über in

$$(7) \quad ds^2 = \frac{1}{y^2}(dy^2 + dx^2),$$

wobei

$$(8) \quad e^u du = dy, \quad v = x$$

Diese Substitution lässt sich für alle Linienelemente durchführen, wenn sie die Form

$$(9) \quad ds^2 = du^2 + G(u) dv^2$$

haben, denn schreiben wir (9) in der Gestalt

$$(10) \quad ds^2 = G(u) \left( \frac{du^2}{G(u)} + dv^2 \right)$$

und führen wir ein

$$(11) \quad \frac{du}{\sqrt{G}} = dy, \quad v = x,$$

so geht (9) über in

$$(12) \quad ds^2 = G_1(y) (dx^2 + dy^2),$$

also in die Form isothermer Parameter. Dabei ist

$$(13) \quad y = \frac{du}{\sqrt{G}}$$

ein elementarelliptisches Integral, das jedenfalls  $y$  eindeutig als Funktion von  $u$  kennzeichnet.

Wir wollen jetzt also die Abbildung der Fläche auf die Ebene untersuchen, die durch die Gleichung (7) vermittelt

wird. Wenn wir  $u$  und  $v$  alle negativen und positiven Werte durchlaufen lassen, so wird in der Abbildung nicht die ganze Ebene durchlaufen, sondern nur die Halbebene  $y > 0$ . Der Wert  $y = 0$  wird im Endlichen nicht erreicht. Für  $u \rightarrow -\infty$  wird die  $x$ -Achse asymptotisch erreicht.

Wir untersuchen nun, was aus den geodätischen Linien bei dieser Abbildung wird. Das geht am schnellsten, wenn wir auf das Variationsprinzip der geodätischen Linie zurückgreifen. Stellen wir die geodätische Linie in der Form  $x = x(y)$  dar, so heisst das Variationsprinzip

$$(14) \quad \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1+x'^2}}{y} dy = \text{Extremum}$$

oder

$$(15) \quad \delta \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1+x'^2}}{y} dy = 0$$

Wir bilden die Variation unter dem Integral und erhalten

$$(16) \quad \frac{x' \delta x'}{y \sqrt{1+x'^2}} dy = 0$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\delta x \frac{x'}{y \sqrt{1+x'^2}} \Big|_{y_1}^{y_2} - \int \delta x \left( \frac{x'}{y \sqrt{1+x'^2}} \right)' dy = 0,$$

und, da  $\delta x$  an den Grenzen verschwinden soll

$$(17) \quad \int_{y_1}^{y_2} \delta x \left( \frac{x'}{y \sqrt{1+x'^2}} \right)' dy = 0$$

Da nun  $\delta x$  längs des Weges ganz beliebig wählbar ist, muss also gelten

$$\left( \frac{x'}{y \sqrt{1+x'^2}} \right)' = 0$$

Wir erhalten also die Gleichung der geodätischen Linie in der Form

$$\frac{x'}{y \sqrt{1+x'^2}} = C_1$$

oder

$$(18) \quad x' = C_1 y \sqrt{1+x'^2}$$

Daraus folgt

$$x'^2 = C_1^2 y^2 (1+x'^2) = \frac{C_1^2 y^2}{1 - C_1^2 y^2}$$

also

$$x' = c y \sqrt{\frac{1}{1-c^2 y^2}}$$

oder

$$dx = c y \sqrt{\frac{1}{1-c^2 y^2}} dy = -\frac{1}{c} d(\sqrt{1-c^2 y^2}).$$

Daraus erhalten wir durch Integration

$$c(x+a) = -\sqrt{1-c^2 y^2}$$

oder

$$c^2((x+a)^2 + y^2) = 1$$

oder

$$(19) \quad (x+a)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

Diese Gleichung stellt aber Kreise dar mit dem Mittelpunkt  $x = -a, y = 0$ . Es ist also als Integral jeder Kreis zu wählen, dessen Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse liegt. Wir wollen nun überlegen, dass es genau so viel Kreise dieser Art gibt wie geodätische Linien auf der Fläche. Ist uns ein Punkt mit hindurchgehender Richtung gegeben, so können wir immer einen derartigen Kreis durch dieses Element hindurchlegen, ausser, wenn die Richtung parallel zur  $y$ -Achse gewählt wird. Aber auch dieser Grenzfall ist in der Abbildung enthalten. Für jede Gerade parallel zur  $y$ -Achse  $g$  gilt doch offenbar  $x' = 0$ . Und dieser Ansatz erfüllt die Gleichung (18), wenn wir berücksichtigen, dass wir, um (18) zu erhalten, durch  $c$  dividiert haben. Dabei ist die Lösung  $0 = x' = 0$  verlorengegangen.

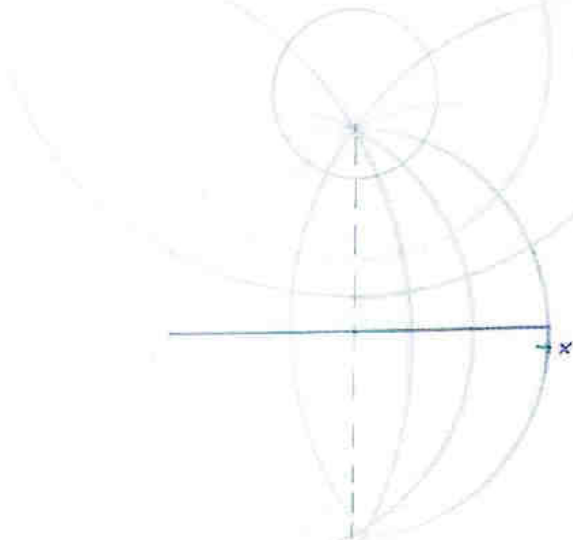
Wir sehen also, dass diese Abbildung, die zuerst von Poincaré untersucht wurde, die geodätischen Linien der betrachteten Fläche in die Halbkreise der Halbebene überführt.

Es erhebt sich nun die Frage, was für Kurven auf der Fläche den übrigen Kreisen der Halbebene entsprechen. Wir behaupten, dass es die geodätischen Entfernungskreise sind. Die sind so definiert: Man betrachte eine kleine Umgebung eines Punktes  $M$  und ziehe dort die geodätischen



Linien. Auf diesen trägt man gleich grosse Entfernungen ab. Das ist in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes nicht mit Gefahr verbunden. Dann nennt man den geometrischen Ort aller dadurch erhaltenen Punkte einen geodätischen Entfernungskreis.

Wir haben früher schon bewiesen, dass die Orthogonaltrajektorien der geodätischen Linien auf einer Fläche Äquidistant sind. Betrachten wir also die Gesamtheit aller Orthogonaltrajektorien der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien, so sind sie also gerade die Orte gleicher geodätischer Entfernung. Unsere Behauptung ist, dass diese Orthogonaltrajektorien bei der Abbildung in Kreise übergehen. Um das zu beweisen, spiegeln wir den Bildpunkt



Figur 34.

$M^*$  von  $M$  an der  $x$ -Achse und erhalten den Punkt  $M'$ . Dann ziehen wir das ~~Kreis~~ Kreisbüschel durch  $M^*$  und  $M'$ . Das sind sämtlich Kreise, die auf der  $x$ -Achse senkrecht stehen, die also Bilder von geodätischen Linien sind. Da nun unsere Abbildung winkeltreu ist, müssen die geodätischen Entfernungskreise der Fläche in solche Kurven der Ebene über-

gehen, die auf den Kreisen des Büschels senkrecht stehen. Das sind aber wieder Kreise, und zwar sind, es, da für uns nur die obere Halbebene in Frage kommt, nur solche Kreise, welche die  $x$ -Achse nicht schneiden. Man kann nun umgekehrt auch zeigen, dass man jeden Kreis der Ebene, der die  $x$ -Achse nicht trifft, als Bild eines geodätischen Entfernungskreises auffassen kann. Zu dem Zwecke spiegelt man ihn an der  $x$ -Achse und erhält ~~den~~ durch zwei Kreise, zu denen man immer ein Büschel finden kann, das die  $x$ -Achse senkrecht durchschneidet.

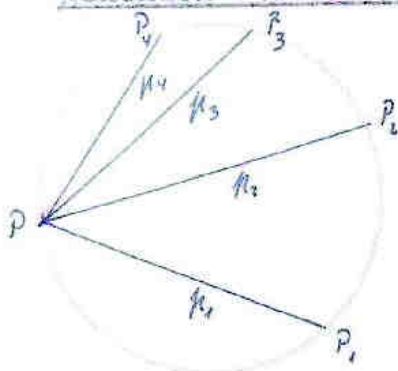
Es bleiben nun nur noch die Kreise der Ebene zu betrachten übrig, die die Grenze unter einem beliebigen

Winkel durchsetzen. Das sind also Kreise, die weder Bilder geodätischer Linien noch Bilder geodätischer Entfernungskreise sind. Auf diese Frage kommen wir noch zurück.

§69: Der geodätische Abstand auf Flächen der  
Gaussischen Krümmung -1.

Im vorigen Paragraphen ist schon von den geodätischen Avstände geredet worden. Es lässt sich nun für unser Problem eine einfache Definition des geodätischen Abstandes auf der betrachteten Fläche geben, und zwar auf dem Umwege über die Abbildung auf die Poincaresche Halbebene. Es wird dabei herauskommen, dass der geodätische Abstand gleich dem Logarithmus eines Doppelverhältnisses ist. Da haben wir nun zunächst zu erklären, was wir unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten, die auf einem Kreise liegen, verstehen wollen; wir definieren:

Unter dem Doppelverhältnis vierer Punkte eines Kreises versteht man das Doppelverhältnis der von einem beliebigen Punkte desselben Kreises nach diesen Punkten gehenden Strahlen.



Figur 35.

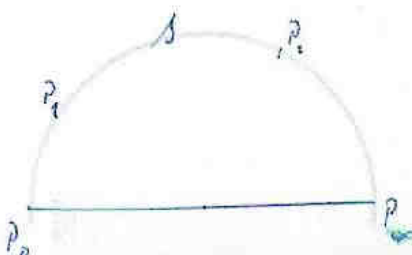
Es ist also (s. Fig. 35)

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (P_1, P_2, P_3, P_4).$$

Wir setzen als bekannt voraus, dass dieses Doppelverhältnis sich nicht ändert, wenn der Punkt P auf dem Kreise wandert.

Ueber dieses Doppelverhältnis werden wir eine Reihe von Sätzen beweisen: . Unser Ziel wird folgendes sein:

Wenn wir die Schnittpunkte eines Kreises, der als Abbildung einer geodätischen Linie auf-



Figur 36

gefasst werden kann, der also senkrecht auf der Grenze steht, mit  $P_0$  und  $P_\infty$  bezeichnen, so ist der Abstand zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$

$$s = \left| \log (P_\infty, P_0, P_1, P_2) \right|.$$

Um diesen Satz zu gewinnen, brauchen wir eine ganze Reihe von Hilfssätzen.

1.)

Es seien  $x, y$  die Koordinaten in der betrachteten Ebene. Dann setzen wir

$$(1) \quad z = x + iy.$$

Dann ist eine Abbildung der Ebene auf sich gegeben durch

$$(2) \quad z^* = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Durch diese Gleichung wird die komplexe Zahl  $z^*$  als Funktion der Zahl  $z$  festgelegt. Setzen wir

$$(3) \quad z^* = x^* + iy^*,$$

so erhalten wir also  $x^*, y^*$  als Funktionen von  $x, y$ .

Damit die Funktion (2) wirklich eindeutig ist, ist notwendig und hinreichend, dass

$$(4) \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

ist. Wir behaupten nun zweierlei über Abbildungen von dem Typus (2), erstens, dass sie winkeltreu sind. Das folgt sofort aus den Überlegungen in §§66, 67. Die Abbildung gehört zu dem allgemeinen Typus der winkeltreuen Abbildungen, denn sie wird durch eine analytische Funktion vermittelt. Die Geraden  $z = \text{const}$  sind ja nach den Überlegungen in §66 die Isotropen Richtungen.

Weniger selbstverständlich ist unsere zweite Behauptung, dass die Abbildung (2) kreistreu ist. Dabei sind gerade Linien als Grenzfälle von Kreisen aufzufassen. Wir behaupten also, dass die Gesamtheit der Kreise in sich übergeht. Diese Tatsache ist am leichtesten analytisch

einzusehen. Die Gleichung eines Kreises hat allgemein die Form

$$(5) \quad a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0.$$

Es ist nun

$$(6) \quad x^2 + y^2 = z \bar{z},$$

$$(7) \quad 2x = z + \bar{z},$$

$$(8) \quad 2y = \frac{z - \bar{z}}{i} = -i(z - \bar{z}),$$

also wird aus (5)

$$(9) \quad a z \bar{z} + b(z + \bar{z}) - i c (z - \bar{z}) + d = 0.$$

Wir haben also zu zeigen, dass diese Kreisgleichung durch die Transformation (2) wieder in eine Kreisgleichung übergeht. Dabei werden sich die Koeffizienten ändern. Wir schreiben die Gleichung (9) um in

$$(10) \quad a z \bar{z} + (b - ic) z + (b + ic) \bar{z} + d = 0.$$

Wegen (4) können wir (2) nach  $\bar{z}$  auflösen:

$$(11) \quad \bar{z} = \frac{\alpha z^* + \beta}{\gamma z^* + \delta},$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  nicht mehr die alten Werte haben. Setzen wir (11) in (10) ein, so wird

$$(12) \quad a \frac{(\alpha z^* + \beta)(\bar{\alpha} \bar{z}^* + \bar{\beta})}{(\gamma z^* + \delta)(\bar{\gamma} \bar{z}^* + \bar{\delta})} + (b - ic) \frac{\alpha z^* + \beta}{\gamma z^* + \delta} + (b + ic) \frac{\bar{\alpha} \bar{z}^* + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} \bar{z}^* + \bar{\delta}} + d = 0$$

Wir setzen

$$(13) \quad b - ic = B, \quad b + ic = \bar{B}$$

und erhalten

$$(14) \quad a(\alpha \bar{\alpha} \bar{z}^* + \beta \bar{\alpha}) (\bar{\alpha} \bar{z}^* + \bar{\beta}) + B(\alpha \bar{z}^* + \beta)(\bar{\gamma} \bar{z}^* + \bar{\delta}) + \bar{B}(\bar{\alpha} \bar{z}^* + \bar{\beta})(\gamma z^* + \delta) + d(\gamma z^* + \delta)(\bar{\gamma} \bar{z}^* + \bar{\delta}) = 0$$

Von dieser Gleichung haben wir also zu zeigen, dass sie

von demselben Typus ist wie (10). Es genügt offenbar zu zeigen, dass die einzelnen Summanden von derselben Form sind, d.h. dass  $z^* \bar{z}^v$  mit einem reellen Koeffizienten multipliziert ist, dass  $z^*$  und  $\bar{z}^v$  mit konjugiert komplexen Zahlen multipliziert sind, und dass das absolute Glied reell ist:

a.)

Es ist

$$a(\alpha z^* + \beta)(\bar{\alpha} \bar{z}^v + \bar{\beta}) = z^* \bar{z}^v a \alpha \bar{\alpha} + \bar{z}^v a \alpha \bar{\beta} + z^* a \bar{\alpha} \beta + \bar{\beta} \beta$$

$a \alpha \bar{\alpha}$  ist reell,  $a \alpha \bar{\beta}$  ist zu  $a \bar{\alpha} \beta$  konjugiert,  $\beta \bar{\beta}$  ist reell.

b.)

Es ist

$$d(\gamma z^* + \delta)(\bar{\gamma} \bar{z}^v + \bar{\delta}) = z^* \bar{z}^v d\gamma \bar{\gamma} + z^* d\gamma \bar{\delta} + \bar{z}^v d\bar{\gamma} \delta + \delta \bar{\delta}$$

$d\gamma \bar{\gamma}$  ist reell,  $d\gamma \bar{\delta}$  ist konjugiert zu  $d\bar{\gamma} \delta$ , und  $\delta \bar{\delta}$  ist reell.

c.)

Die beiden übrigbleibenden Glieder fassen wir zusammen. Sie lassen sich jedenfalls zu einem Ausdruck der Form

$$A z^* \bar{z}^v + B z^* + C \bar{z}^v + D$$

zusammenfassen. Da sehen wir nun folgendes: wenn wir zu allen Grössen in den beiden Ausdrücken die konjugierten Grössen nehmen, dann bleibt der Ausdruck als ganzer ungeändert. Es besteht also die Gleichung

$$(15) \quad A z^* \bar{z}^v + B z^* + C \bar{z}^v + D = \bar{A} \bar{z}^* z^v + \bar{B} \bar{z}^* + \bar{C} z^* + \bar{D}$$

Diese Gleichung gilt identisch in  $z^*$ . Wir erhalten also durch Koeffizientenvergleichung

$$A = \bar{A},$$

d.h.  $A$  ist reell. Ferner wird

$$B = \bar{C}, \quad \bar{B} = C,$$

d.h.  $B$  und  $C$  sind konjugiert komplex. Ferner ist

$$D = \bar{D}$$

d.h.  $D$  ist reell. Damit ist der Beweis erbracht, dass

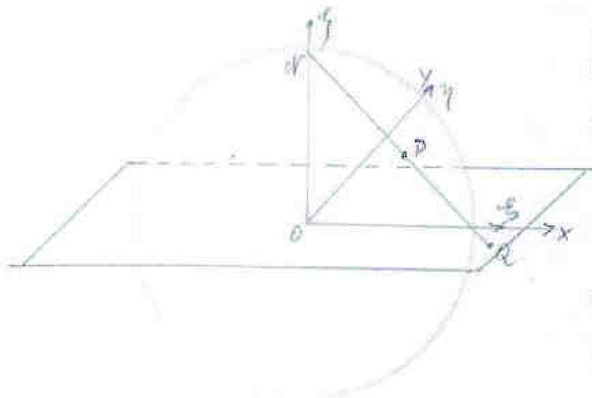
die Abbildung (2) kreistreu ist.

Wir brauchen nun für den weiteren Verlauf eine Betrachtung der stereographischen Projektion.

Zunächst behaupten wir:

Die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene ist winkel- und kreistreu.

Von da aus werden wir dann auf eine weitere Eigenschaft dieser Abbildung kommen, die wir später benutzen werden.



Figur 36.

Wir führen auf der Kugel die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  ein.

Dann gilt zunächst

$$(16) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Wir projizieren von dem Punkte

$N = N(0, 0, 1)$  aus den Punkt

$P = P(\xi, \eta, \zeta)$  auf die Ebene.

Das Bild sei  $Q = Q(x, y, 0)$ .

Es ist also die Beziehung zwischen den Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  und den Ebenenkoordinaten  $x, y$  zu untersuchen.

Die Vektoren  $NP$  und  $NQ$  sind offenbar proportional, weil sie in derselben Geraden liegen. Das Verhältnis ihrer Längen ist

$$(17) \quad \frac{NP}{NQ} = \frac{1-\zeta}{1} = 1 - \zeta$$

Diese Gleichung muss koeffizientenweise gelten, also ist

$$\frac{\eta}{y} = 1 - \zeta$$

$$\frac{\xi}{x} = 1 - \zeta$$

oder

$$(18) \quad x = \frac{\xi}{1 - \zeta}$$

$$(19) \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

Wir haben zu zeigen, dass Kreise auf der Kugel in Kreise an der Ebene übergehen. Nun sind Kreise auf der Kugel

aufzufassen als ebene Schnitte der Kugel. Wir erhalten also einen Kreis auf der Kugel, wenn wir die Kugelkoordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  einer linearen Beziehung unterwerfen. Denken wir diese nach  $\zeta$  aufgelöst und in der Form geschrieben

$$(20) \quad \zeta = a \xi + b \eta + c$$

Wir können also sagen, dass, wenn  $\xi, \eta, \zeta$  eine lineare Gleichung erfüllen, sie einen Kreis auf der Kugel bestimmen.

Aus (18) und (19) folgt nun

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2}$$

oder wegen

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1-\zeta^2}{1-\zeta} = (1-\zeta)(1+\zeta)$$

$$(21) \quad x^2 + y^2 = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

Es sei nun ein Kreis in der Ebene durch die Gleichung

$$(22) \quad a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0$$

gegeben. Setzen wir (21), (18) und (19) in diese Gleichung ein, so folgt

$$(23) \quad a(1+\zeta) + 2b\xi + 2c\eta + d(1-\zeta) = 0,$$

Es folgt also, dass die Gesamtheit der Punkte  $(\xi, \eta, \zeta)$ , die dem ebenen Kreise durch die Abbildung entsprechen, einer linearen Gleichung genügen, also nach unserer obigen Ueberlegung, dass sie einen Kreis bestimmen.

Es ist nun zu beachten, dass diese Ueberlegung auch auf die Geraden der Ebene angewandt werden kann, denn auch für  $a = 0$  bleibt doch noch eine lineare Gleichung zwischen  $\xi, \eta, \zeta$  bestehen. Wir erhalten also: in der Tat das Ergebnis, dass die stereographische Projektion kreistreu ist.

Es bleibt also noch die Winkeltreue zu beweisen. Offenbar ist die Abbildung differentierbar. Nun geht bei

jeder differentiierbare Abbildung ein kleiner Kreis in der  $xy$ -Ebene in einen kleinen Kegelschnitt in der Bildfläche über. Nun wissen wir aber, dass Kreise in Kreise übergehen, dass also keine Verzerrungen, auch im Grossen nicht, eintreten. Wir erhalten also auch Winkeltreue der stereographischen Projektion.

Wir wollen noch einen anderen Beweis der Winkeltreue der stereographischen Abbildung geben. Wir führen die geographische Breite  $\varphi$  und die Länge  $\lambda$  ein. Dann ist

$$(24) \quad \zeta = \sin \varphi,$$

$$(25) \quad \xi = \cos \varphi \cos \lambda,$$

$$(26) \quad \eta = \cos \varphi \sin \lambda.$$

Wir berechnen nun das Linienelement auf Ebene und Kugel. Ist die Abbildung winkeltreu, so muss sich ergeben, dass diese beiden Elemente proportional sind. Das Linienelement der Kugel wird offenbar

$$(27) \quad ds^2_{\text{Kug.}} = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Aus (24), (25) und (26) folgt

$$(28) \quad d\zeta = \cos \varphi d\varphi$$

$$(29) \quad d\xi = -\sin \varphi \cos \lambda d\varphi - \cos \varphi \sin \lambda d\lambda$$

$$(30) \quad d\eta = -\sin \varphi \sin \lambda d\varphi + \cos \varphi \cos \lambda d\lambda$$

Also wird aus (27)

$$(31) \quad \begin{aligned} ds^2_{\text{Kug.}} &= d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 \\ &= d\varphi^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \lambda + \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda) \\ &\quad + d\lambda^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda) \\ &= d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2. \end{aligned}$$

Entsprechend bilden wir nun das Linienelement für die Ebene. Es ist

$$(32) \quad x = \frac{\xi}{1-\zeta} = \frac{\cos \varphi \cos \lambda}{1 - \sin \varphi},$$

$$(33) \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta} = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{1 - \sin \varphi},$$



Wir setzen nun

$$(34) \quad \frac{\lambda}{2} = \varphi = \alpha$$

Dann wird also  $\alpha$  der Polabstand, und die Formeln (32) und (33) gehen über in

$$(35) \quad x = \frac{\sin \alpha \cos \lambda}{1 - \cos \alpha}$$

$$(36) \quad y = \frac{\sin \alpha \sin \lambda}{1 - \cos \alpha}$$

oder unter Benutzung der Formeln

$$(37) \quad \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \\ x &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \lambda}{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \lambda}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= \cotg \frac{\alpha}{2} \cos \lambda \end{aligned}$$

und entsprechend

$$(38) \quad y = \cotg \frac{\alpha}{2} \sin \lambda$$

Aus (37) und (38) erhalten wir

$$(39) \quad dx = \frac{\cos \lambda}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha + \cotg \frac{\alpha}{2} \sin \lambda d\lambda$$

$$(40) \quad dy = \frac{\sin \lambda}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha + \cotg \frac{\alpha}{2} \cos \lambda d\lambda$$

Also wird

$$(41) \quad \begin{aligned} ds_{\text{Ebene}}^2 &= dx^2 + dy^2 = \left( \frac{\cos^2 \lambda}{4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \lambda}{4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}} \right) d\alpha^2 \\ &\quad + \cotg^2 \frac{\alpha}{2} (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) d\lambda^2 \\ &= \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}} d\alpha^2 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2} d\lambda^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichung haben wir also mit (31) zu vergleichen, haben also zu beweisen, dass die beiden Formen

$$d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\lambda^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}} d\alpha^2 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2} d\lambda^2$$

proportional sind, d.h. wir haben nachzuweisen, dass die Koeffizienten von  $d\alpha$  und  $d\lambda$  durch Multiplikation mit

demselben Faktor auseinander hervorgehen, dass also gilt

$$\sin^2 \alpha \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}} = \cot^2 \frac{\alpha}{2}$$

Diese Gleichung können wir aber sofort verifizieren. Wir schreiben sie in der Gestalt

$$\sin^2 \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

oder

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

Damit ist der Satz bewiesen.

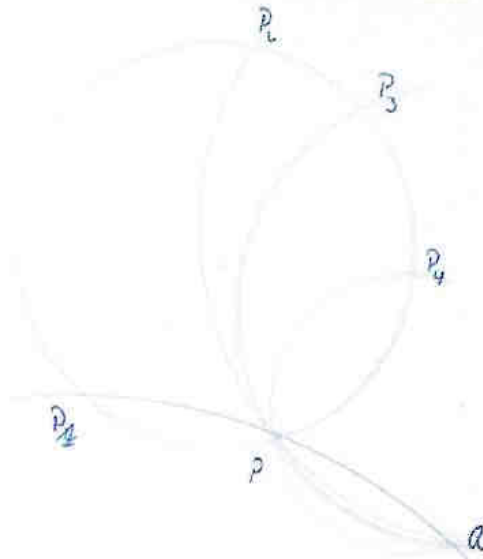
-----

Wir behaupten nun folgenden Satz:

Die stereographische Abbildung ist kreisdoppelverhältnistreu.

Dieser Satz besagt, dass vier Punkte eines Kreises in vier Punkte eines Kreises unter Erhaltung ihres Doppelverhältnisses übergehen. Um ihn zu beweisen, genügt es offenbar, dass Doppelverhältnis der vier Punkte eines Kreises auf eine Weise zu definieren, die mit der bereits gegebenen übereinstimmt, die aber gegenüber der stereographischen Projektion invariant ist. Wir wissen, dass Winkel und Kreis invariant sind, wobei zu den Kreisen auch die Geraden zu rechnen sind. Wir müssen also versuchen, das Doppelverhältnis der vier Punkte durch Kreise und Winkel zu erklären. Auch wenn wir es als Doppelverhältnis von vier Strahlen erklären, bleibt es nicht invariant, denn die Geraden brauchen ja nicht wieder in Gerade überzugehen. Wir wissen aber, dass die vier Geraden in vier Kreise eines Büschels übergehen. Es muss also folgendes gelten: Wenn wir ausser dem Punkte P noch irgendeinen Punkt Q ganz willkürlich wählen und nun die Kreise betrachten, die durch P, Q und die Punkte  $P_1$  gehen, dann ist das Doppelverhältnis der vier Punkte als das der vier Tangenten in P bzw. Q. Nun gehen aber

die vier Kreise in vier Kreise eines Büschels über,



und zwar bleiben dabei die Winkel erhalten, weil die Abbildung winkeltreu ist.

Diese Figur übertragen wir nun auf die Kugel mit Hilfe der stereographischen Projektion.

Es genügt also zum Beweise u  
unseres Satzes, zu zeigen, dass die den Kreisen der Ebene entsprechenden Kreise der Kugel

dasselbe Doppelverhältnis bilden. Wir haben nun schon davon Gebrauch gemacht, dass die Kreise auf Kugeln nichts anderes sind als Schnitte von Kugeln mit Ebenen. Die für uns in Frage kommenden Ebenen sind nun diejenigen, die durch die räumlichen Geraden  $PQ$  gehen, und die vier Richtungen sind diejenigen, die durch die Schnitte der vier Ebenen durch  $P_1, P_2, P_3, P_4$  mit der Tangentialebene der Kugel in  $P$  bestimmt sind. Es genügt also nun, nachzuweisen, dass diese vier Ebenen das richtige Doppelverhältnis haben, Das ist aber trivial. Betrachten wir nämlich die Schnitte der vier Ebenen mit derjenigen Ebene, in der der Originalkreis auf der Kugel liegt, so sind sie Schnitte vier Geraden. Die Ebenen haben genau dasselbe Doppelverhältnis wie diese Geraden, und das ist genau das Doppelverhältnis, von dem wir ausgingen.

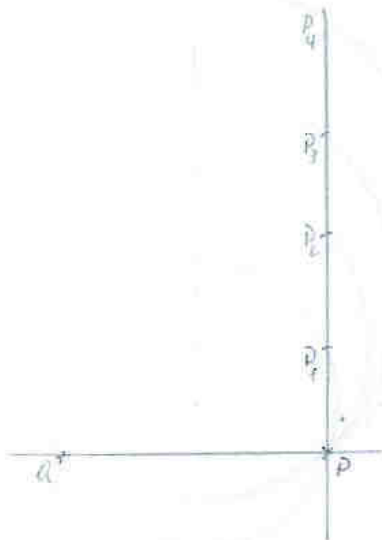
Damit ist der Beweis erbracht.

Es ist nun aus der projektiven Geometrie bekannt, dass das Doppelverhältnis von vier Punkten  $z_1, z_2, z_3, z_4$  dann invariant ist, wenn der Ausdruck

$$(42) \quad \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

invariant ist. Wir haben also zu beweisen, dass dieser

Ausdruck reell bleibt, wenn die vier Punkte auf einem Kreise liegen. Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst einen einfachen Fall, nämlich den, dass der Kreis zu einer Geraden ausartet. Dann können wir das Doppelverhältnis mit einiger Willkür definieren. Wir betrachten einen Punkt  $Q$ . Dann legen wir durch  $Q, P$  und die Punkte  $P_1$  Kreise und fassen das Doppelverhältnis dieser Kreise ins Auge. Man sucht nun eine Abbildung, die



die Gerade, in der  $P$  und  $P_1$  liegen, fest lässt, die aber den Punkt  $P$  ins Unendliche schaffft. Dann werden aus den vier gezeichneten Kreisen Gerade, die durch den Bildpunkt von  $Q$  gehen. Dabei ändert sich das Doppelverhältnis von  $P_1, P_2, P_3, P_4$  nicht. Wir sehen also, dass, wenn die Punkte  $P_i$  auf einer Geraden liegen, das Doppelverhältnis der ~~xxxxxxxi~~

Kreise in der Ausgangsebene dasselbe ist wie das der Geraden in der Bildebene. Wir haben dazu nur noch zu zeigen, dass es immer eine Abbildung gibt, die eine gegebene Gerade in einen gegebenen Kreis überführt, so dass die Doppelverhältnisse erhalten bleiben. Wählen wir die Gerade senkrecht zur  $x$ -Achse, dann verschwinden in  $z_1$  die imaginären Bestandteile und der Ausdruck (42) ist reell. Für diesen Fall ist der Ausdruck das Doppelverhältnis und reell. Also ist er es auch allgemein.

Wir haben also nur noch zu zeigen, dass sich jeder Kreis durch unsere Abbildung in eine vertikale Gerade überführen lässt. Wir setzen als bekannt voraus, dass man jede Transformation auf ihre Normalform bringen kann. In der Abbildung haben wir vier Konstante, von denen aber nur drei unabhängig sind, denn wenn wir  $\alpha, \beta, \gamma$ , und  $\epsilon$  mit einer Konstanten multiplizieren,

so bleibt der Ausdruck (42) ungeändert. Wir sind also fertig, wenn es uns gelingt, drei der auf dem Kreis gegebenen Punkte in die Punkte  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  und  $(0,-1)$  überzuführen. Dann wird der Kreis offenbar in die verlangte Gerade übergeführt.

Die drei Punkte des Kreises seien  $z_1, z_2, z_3$ . Wir haben also  $\alpha, \beta, \gamma$ , und  $\delta$  so zu wählen, dass für diese drei Punkte die Bildpunkte  $z_1^*, z_2^*, z_3^*$ , die Werte  $0, 1$  und  $-1$  annehmen. Dann folgt aus (11)

$$(43) \quad z_1 = \frac{\beta}{\delta}, \quad z_2 = \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}, \quad z_3 = \frac{-\alpha i + \beta}{-\gamma i + \delta},$$

oder

$$(44) \quad \beta - z_1 \delta = 0, \quad \alpha i + \beta - z_2 \gamma i - z_2 \delta = 0, \quad -\alpha i + \beta + z_3 \gamma i - z_3 \delta = 0.$$

Das sind drei Gleichungen mit den vier Unbekannten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Und diese drei Gleichungen haben immer eine Lösung, wenn nicht alle Koeffizienten verschwinden.

Es ist notwendig, dass die Determinante einen von Null verschiedenen Wert hat. Der Ausnahmefall verschwindender Determinante kann aber nicht eintreten, weil die drei Werte  $z_1, z_2, z_3$  nach Voraussetzung verschieden sind.

Nach diesen Vorbereitungen können wir daran gehen, unsere Behauptung

$$(45) \quad s = \left| \log (P_\infty, P_0, P_1, P_2) \right|$$

zu beweisen. Wir müssen nun, da das Doppelverhältnis durch Vertauschen zweier der Glieder in den reziproken, der Logarithmus also in den negativen Wert übergeht, weil wir nichts über die Reihenfolge der Punkte  $P_1, P_2$  vorausgesetzt haben, absolute Beträge nehmen, da negative Bogenlänge keinen Sinn hat. Unsere Behauptung kann also nur heissen:

$$(46) \quad s = \left| \log (P_\infty, P_0, P_1, P_2) \right|$$

Wir behaupten zunächst, dass das Linienelement invariant

gegen die Abbildung

$$z = \frac{\alpha z^* + \beta}{\gamma z^* + \delta}$$

ist, wobei wir voraussetzen, dass  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  reell sind, und dass die Determinante  $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$  ist.

Wir müssen nun zeigen, dass diese Abbildung die Halbebene  $y > 0$  in sich überführt. Zu dem Zwecke zerlegen wir in Realteil und Imaginärteil:

$$(47) \quad x + iy = \frac{(\alpha z^* + \beta)(\gamma z^* + \delta)}{|\gamma z^* + \delta|^2}$$

Der imaginäre Bestandteil wird

$$(48) \quad y = \int \left( \frac{(\alpha z^* + \beta)(\gamma z^* + \delta)}{|\gamma z^* + \delta|^2} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{|\gamma z^* + \delta|^2} y^* \right)$$

Ist die Determinante positiv, so ist der Quotient positiv. Es geht also  $y^*$  aus  $y$  hervor durch Multiplikation mit einer positiven Grösse. D.h. die Halbebene  $y > 0$  geht in sich über. Ausserdem wissen wir, dass diese Abbildung konform ist; leider kann man nicht sofort schliessen, dass sie auch längentreu ist. Wir wollen es aber beweisen. Es ist

$$(49) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = |dz|^2$$

also

$$(50) \quad ds = \frac{|dz|}{y}$$

Nun ist nach (48)

$$(51) \quad dz = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{|\gamma z^* + \delta|^2} dz^*,$$

und aus (11) folgt

$$(52) \quad \begin{aligned} dz &= \frac{(\gamma z^* + \delta) dz^* - (\alpha z^* + \beta) dz^*}{|\gamma z^* + \delta|^2} \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) dz^*}{|\gamma z^* + \delta|^2} \end{aligned}$$

also

$$(53) \quad |dz| = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) |dz^*|}{|\gamma z^* + \delta|^2}$$

Dividieren wir (53) durch (48), so folgt

$$(54) \quad \frac{|dz|}{y} = \frac{|ds|}{y}$$

also ist in der Tat die Abbildung längentreu.

Es genügt nun, unsere Behauptung für einen Spezialfall zu beweisen, dass die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf einer vertikalen Geraden liegen. Dann ist das Bild der geodätischen Linie der Halbkreis durch die beiden Punkte senkrecht auf der Grenze, also die vertikale Gerade durch  $P_1$  und  $P_2$ . Dann wird also wegen  $ds = 0$

$$(55) \quad s = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{dy}{y} = \log \frac{y_2}{y_1}$$

Andererseits aber wissen wir, dass bei diesem Spezialfall unser Doppelverhältnis durch den Quotienten  $\frac{y_2}{y_1}$  ausgedrückt wird. Also ist in der Tat für diesen Spezialfall

$$(56) \quad s = |\log (P_\infty, P_0, P_1, P_2)|$$

Um nun von diesem Spezialfall auf den allgemeinen zu kommen, schliessen wir so:

Da unsere Abbildung längentreu ist, bleibt der Abstand  $P_1 P_2$  erhalten. Da unsere Abbildung das Doppelverhältnis erhält, wird auch für alle Punkte, die aus unseren speziellen Punkten  $P_0, P_\infty, P_1$  und  $P_2$  hervorgehen, dass Doppelverhältnis den Wert von (56) haben. Wir sind also fertig, wenn wir zeigen, dass sich der Halbstrahl unseres Falles in einen Halbkreis überführen lässt. Diese gewünschte Transformation ist

$$(57) \quad t = -\frac{1}{z^x - z_\infty^x}$$

d.h.

$$(58) \quad \alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1, \delta = -z_\infty^x$$

Es ist  $\beta$  negativ gewählt worden, damit die Determinantengleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

erfüllt ist. Diese Transformation führt in der Tat den Punkt  $z^* = z_\infty^*$  über in den Punkt  $z = \infty$ .

Wir haben also nur noch zu beweisen, dass diese Transformation das Doppelverhältnis ungeändert lässt. Wenn das der Fall ist, sind wir endlich fertig.

Wir haben schon in §67 angekündigt, dass die Behandlung der konformen Abbildung zweier Methoden fähig ist. Den einen Weg, der über das Komplexe geht, haben wir schon eingeschlagen. Jetzt gehen wir im Rahmen unserer bisherigen Betrachtungen an die Behandlung des Problems wobei wir im ~~Komplexen~~ <sup>Reellen</sup> bleiben. Dadurch machen wir uns dann Flächen zugänglich, die eventuell gar nicht im Komplexen definiert sind.

Den Weg, den wir einschlagen werden, kann man fast unmittelbar erkennen.

Wenn uns auf der Fläche ein Isothermennetz irgendwie gegeben ist, dann wollen wir zunächst einmal auf eine andere Frage eingehen. Wir wollen von einem Isothermensystem  $\alpha^*, \beta^*$  aus das gegebene System  $\alpha, \beta$  gewinnen, ohne uns im Komplexen zu bewegen. Unsere bisherige Methode war:

Man hat

$$(59) \quad \alpha^* + i\beta^* = f(\alpha + i\beta)$$

zu setzen, wobei  $f$  eine analytische Funktion ist.

Jetzt suchen gehen wir mittels Differentiation vor. Wir differenzieren nach  $\alpha$  und  $\beta$  und trennen dann nach Realteil und Imaginärteil. Differentiation nach  $\alpha$  ergibt

$$(60) \quad \alpha_\alpha^* + i\beta_\alpha^* = f'(\alpha + i\beta) \cdot 1$$

und nach  $\beta$ :

$$(61) \quad \alpha_\beta^* + i\beta_\beta^* = f'(\alpha + i\beta) \cdot i$$

Wir multiplizieren (60) mit  $i$  und subtrahieren die



beiden Gleichungen voneinander:

$$(62) \quad \alpha_p^* + i\beta_p^* - i\alpha_a^* + \beta_a^* = 0,$$

also

$$(63) \quad \alpha_p^* = -\beta_a^*, \quad \alpha_a^* = \beta_p^*$$

Diese Gleichungen sind nichts Anderes als die Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen. Sie sind grundlegend für die ganze Funktionentheorie. Und sie lösen unser Problem. Wenn wir zwei Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  so bestimmen können, dass diese Gleichungen (63) erfüllt sind, so ist, falls  $\alpha, \beta$  ein Isothermennetz war, auch  $\alpha^*, \beta^*$  ein solches. Das wollen wir uns noch klarmachen. Wir bilden den Ausdruck  $dd^* \alpha^2 + d\beta^{*2}$  und haben nach-

zurechnen, dass dieser Ausdruck ein Multiplum von  $d\alpha^2 + d\beta^2$  ist. Es ist

$$\begin{aligned} dd^* \alpha^2 + d\beta^{*2} &= (d\alpha_a^* d\alpha + d\beta_p^* d\beta)^2 + (d\beta_a^* d\alpha + d\alpha_p^* d\beta)^2 \\ &= dd^*(\alpha_a^{*2} + \beta_p^{*2}) + d\beta^2(\alpha_p^{*2} + \beta_a^{*2}) \\ &\quad + dd d\beta(2\alpha_a^* \alpha_p^* + 2\beta_a^* \beta_p^*), \end{aligned}$$

oder nach (63)

$$(64) \quad \begin{aligned} dd^* \alpha^2 + d\beta^{*2} &= dd^*(\alpha_a^{*2} + \beta_a^{*2}) + d\beta^2(\beta_p^{*2} + \alpha_p^{*2}) \\ &\quad + dd d\beta(2\alpha_a^* \alpha_p^* - 2\alpha_p^* \alpha_a^*) \\ &= (dd^2 + d\beta^2)(\alpha_a^{*2} + \beta_a^{*2}), \end{aligned}$$

Also ist in der Tat  $dd^* \alpha^2 + d\beta^{*2}$  ein Multiplum von  $d\alpha^2 + d\beta^2$ .

Dieses System kann man aber noch einen Schritt weiter umformen. Ein Isothermennetz ist ja im Wesentlichen bestimmt, wenn eine der beiden Kurvenscharen gegeben ist. Die andere ist ja orthogonal dazu. Wir brauchen also nur eine Schar zu bestimmen. Um zunächst  $\alpha^*$  zu bestimmen differenzieren wir (63;1) nach  $\beta$  und (63;2) nach  $\alpha$ :

$$(65) \quad \Delta \alpha^* = \alpha_{aa}^* + \alpha_{\beta\beta}^* = 0.$$

Der Ausdruck muss verschwinden wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen von  $\beta^r$ .

Nun ist aber unser Ansatz noch nicht befriedigend, weil wir von dem Isothermennetz  $\alpha$ , ausgingen, das wir ja gerade bestimmen wollten. Wir wollten ja überhaupt erst einmal ein solches Netz haben. Wir haben also unseren gewonnenen Formeln solche gegenüberzustellen, die bei beliebigen Koordinaten gelten, haben also eine Methode anzugeben, die unserer bisherigen völlig analog ist, die aber bei beliebiger Wahl der Koordinaten gilt. Wir müssen also eine invariante Formulierung zu finden versuchen. Um das zu können, brauchen wir einen gewissen Umweg.

-----  
 §70: Die Differentiatoren von Beltrami.  
 =====

Man hat in der Physik oft Anlass, Ortsfunktionen auf Kugelflächen zu betrachten, wie etwa Temperatur, elektrische Spannung, Geschwindigkeit u. a. m., sucht also nach Differentiationsprozessen, die das Gefälle regulieren und unabhängig vom Koordinatensystem sind, die man andererseits aber wieder unter Zugrundelegung eines bestimmten Koordinatensystems berechnen muss.

Aus den vielen Problemen greifen wir eines heraus, nämlich das der wirbelfreien Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Wir denken uns irgendein Flächenstück mit dem Ortsvektor  $\xi$ , und darauf ströme eine inkompressible Flüssigkeit.<sup>1)</sup> In jedem Punkte der Fläche sei die Geschwindigkeit durch einen Vektor angegeben, der natürlich tangential zur Fläche gerichtet sein muss. Wir wollen nun zeigen, dass man

1) Diese Annahme hat physikalischen Sinn; denn man kann ja auch den elektrischen Strom als eine solche Flüssigkeit auffassen.

dieses Vektorfeld  $\mathcal{A}$  mit Hilfe einer Ortsfunktion beschreiben kann, falls das Feld nur einer gewissen Bedingung genügt, falls es nämlich wirbelfrei ist. Dabei soll Wirbelfreiheit bedeuten, dass auf einer geschlossenen Kurve der Fläche das Integral der Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Kurve verschwindet:

$$(1) \quad \oint \mathcal{A}_s ds = 0$$

Dieses Integral können wir nun mit Hilfe des Ortsvektors einfacher schreiben. Es ist

$$(2) \quad \mathcal{A}_s ds = s_2 \dot{s} dt = s_2 \left| \frac{dy}{dt} \right| dt = (s_2 \dot{y}) dt = (s_2 dy),$$

also geht (1) über in

$$(3) \quad \oint s_2 dy = 0$$

Das soll also auf jedem geschlossenen Wege gelten.

Es liegt nun nahe, irgendeinen Punkt  $P_0$  auszuzeichnen und das Integral (3) als Funktion der oberen Grenze aufzufassen:

$$(4) \quad \varphi(P) = \int_{P_0}^P s_2 dy.$$

$\varphi$  hängt, wenn wir  $P_0$  ein für allemal gewählt denken, nur von  $P$  ab und von dem Wege. Die Abhängigkeit vom Wege fällt aber vermöge der Integralbedingung (3) heraus, denn sie besagt, dass die Integrale von  $P_0$  nach einem Punkte  $P$  über verschiedene Wege erstreckt denselben Wert haben.

Wir haben also  $\varphi$ , eine reine Ortsfunktion, vermöge einer Integration gewonnen. Wir können nun aber auch umgekehrt vorgehen, können die Ortsfunktion  $\varphi$  vorgeben und den Vektor  $\mathcal{A}$  durch sie bestimmen. Und dieses Problem gibt gerade Anlass zum ersten Differentiator von Beltrami.

Denken wir zwei Nachbarpunkte  $P$  und  $P'$  ins Auge gefasst. Dann ist

$$(5) \quad \varphi(P') - \varphi(P) = \int_P^{P'} s_2 dy;$$

denn wir können, da  $\varphi$  nicht vom Wege abhängt, immer eine Kurve wählen, die durch  $P_0, P$  und  $P'$  hindurchgeht. Dividieren wir (5) durch den Abstand  $|P' - P|$  der beiden Punkte, so erhalten wir

$$(6) \quad \frac{\varphi(P') - \varphi(P)}{|P' - P|} = \frac{1}{|P' - P|} \int_P^{P'} \mathcal{A} ds.$$

Gehen wir zur Grenze verschwindenden Abstandes, so geht die linke Seite von (6) gegen die Ableitung von  $\varphi$  in der Richtung  $s$ , die rechte gegen den Integranden; also erhalten wir in der Grenze

$$(7) \quad \frac{d\varphi}{ds} = \mathcal{A}_s.$$

Es lässt sich also die Wirbelfreie Geschwindigkeitsverteilung als Ableitung einer Ortfunktion darstellen. Damit kennen wir die Komponenten von  $\mathcal{A}$  durch die Ortfunktion  $\varphi$ , aber noch nicht  $\mathcal{A}$  selbst. Nun ist aber der Betrag von  $\mathcal{A}$  gleich dem der grösstmöglichen Komponente, ebenso die Richtung. Wir haben also nach dem Ausdruck zu suchen

$$(8) \quad \text{Max} \quad \frac{d\varphi}{ds}$$

Ist uns dieses Maximum und seine Richtung bekannt, so haben wir  $\mathcal{A}$ . Diese Aufgabe ist nun formal identisch mit der Aufgabe, das Maximum von  $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$  aufzusuchen. Wir wollen deshalb zu Quadraten übergehen, weil ds eine Wurzel ist. Wir setzen also

$$(9) \quad \text{Max} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \mathcal{V}\varphi$$

und nennen  $\mathcal{V}\varphi$  den ersten Differentiator von Beltrami. Es ist also

$$(10) \quad \mathcal{V}\varphi = \text{Max} \frac{f_u^2 u^2 + 2f_{uv} u v + f_v^2 v^2}{g_u^2 + 2F u v + g v^2}.$$

In Zähler und Nenner steht je eine quadratische Form. Dieses Problem ist aber schon einmal im Laufe der Vor-

lesung aufgetaucht, nämlich in §35 bei der Bestimmung der Krümmungsrichtungen.

Wir wollen zunächst die Maxima charakterisieren und dann die Richtungen. Bei der Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen sprangen die Gaußsche und die mittlere Krümmung heraus. Das waren Ausdrücke, die aus den Gliedern der ersten und zweiten Fundamentalforn gebildet waren. Bei uns liegt nun der Sachverhalt einfacher. Wir kennen ein Extremum, nämlich die Linien  $\varphi = \text{const}$ . Dort verschwindet ja der Zähler von (10). Es ist also der zweite Extremwert identisch mit der Summe der beiden Extremwerte. Seien die Extremwerte  $m_1$  und  $m_2$ , und sei etwa  $m_2 = 0$ . Dann erhalten wir also in voller Analogie mit §36

$$(11) \quad |\nabla\varphi| = m_1 + m_2 = m_1 = \frac{E\varphi_u^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_v^2}{EG - F^2}.$$

Damit haben wir die Hälfte des Problems gelöst.

Um nun die Richtungen zu bestimmen, erinnern wir uns daran, dass die Extremrichtungen sowohl bezüglich der oberen als auch der unteren Form konjugiert sein müssen. Konjugiertsein in bezug auf den Nenner heisst aber, dass die beiden Richtungen senkrecht aufeinander stehen. Eine Extremrichtung kennen wir, die Linien  $\varphi = \text{const}$ , also ist die andere senkrecht zu dieser Richtung. Wir erhalten also

Das stärkste Gefälle findet senkrecht zu den Linien  $\varphi = \text{const}$  statt.

Man wird also zunächst die Niveaulinien  $\varphi = \text{const}$  ins Auge fassen und dann die Orthogonaltrajektorien dazu nehmen. Und dann gibt das Gefälle der Funktion  $\varphi$ , dividiert durch das Linienelement, die Grösse der Geschwindigkeit an. Wir sehen also, dass der Differentiator  $\nabla\varphi$  die Geschwindigkeits- und Gefällsverhältnisse der Fläche regelt,

Damit ist aber die Bewegung der Flüssigkeit noch nicht festgelegt. Wir müssen noch untersuchen, wie  $\varphi$  beschaffen sein muss, damit die Flüssigkeit inkompressibel ist. Es heisst nun Inkompressibilität offenbar, dass in ein und demselben Volumen immer dieselbe Flüssigkeitsmenge enthalten ist. Diese Unzusammendrückbarkeit können wir wieder durch eine Integralbedingung zum Ausdruck bringen. Es wird sich eine Differentialgleichung ergeben, der die Funktion  $\varphi$  genügen muss. Wir können die Inkompressibilität auch dahin aussprechen, dass, wenn wir eine geschlossene Kurve über die Fläche legen, durch diese Kurve im Laufe der Zeit ebensoviel Wasser ein- wie austritt.

Betrachten wir ein Linienelement dieser Kurve; längs dieses Elementes können wir den Vektor  $M$  als konstant ansehen. Da macht man die Annahme, dass die Menge des das Linienelement passierenden Wassers gemessen wird durch das Produkt aus der Länge des Elementes und der Normalkomponente der Geschwindigkeit. Das ist die plausibelste Annahme, die wir machen können. Dann lautet also unsere Inkompressibilitätsbedingung

$$(12) \quad \oint M_n ds = 0$$

Nun haben wir aber in (7) gesehen, dass sich  $M$  als Ableitung einer Ortsfunktion  $\varphi$  darstellen lässt.

Es ist also

$$(13) \quad M_n = \frac{d\varphi}{dn}$$

also geht (12) über in

$$(14) \quad \oint \frac{d\varphi}{dn} ds = 0,$$

wobei über den geschlossenen Weg integriert wird.

Es liegt nun genau wie im Falle der geodätischen Krümmung nahe, dieses Linienintegral in ein Flächenintegral überzuführen. Wir behaupten

$$(15) \quad \int_{C_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \iint_{\text{①}} \Delta \varphi d\sigma$$

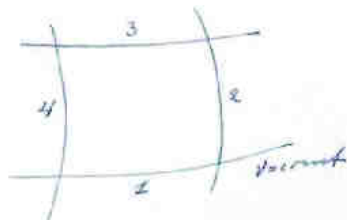
In dem Ausdruck  $\Delta \varphi$  werden wir dann eine Invariante erkennen, und wir werden sehen, dass die Inkompressibilitätsbedingung mit der Gleichung

$$(16) \quad \Delta \varphi = 0$$

identisch ist.

Um die Formel (15) zu beweisen, betrachten wir die geschlossene Kurve auf der Fläche und zerlegen ~~sie~~ <sup>die Fläche</sup> in zwei Teile, I und II. Dann wird, das Integral  $\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$  erstreckt über die ganze Kurve gleich der Summe der beiden Integrale über <sup>die</sup> I und II, umrandenden Kurvenstrecken, denn ~~die~~ Trennungskurve wird zweimal in entgegengesetztem Sinn durchlaufen. Auch die Winkel, die auftreten, heben sich genau wie in unserm früheren Fall ~~aus~~ fort.

Wir können nun an vier Stellen unserer gegebenen Kurve die Kurve durch aufgesetzte rechte Winkel ersetzen, wenn wir die Abweichung von der



Kurve hinreichend klein wählen. Dann können wir rechtwinklige Koordinaten einführen. Wir können also o.B. d.A. unsere Kontur als ein Viereck annehmen mit den Seiten 1, 2, 3, 4. Es war

$$(16) \quad ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2.$$

Auf einer Kurve  $u = \text{const}$  ist  $du = 0$ , also  $ds = B dv$ , und auf  $v = \text{const}$  wird  $ds = A du$ . Ferner wird die Normalenrichtung auf einer Kurve  $u = \text{const}$  genau gleich der  $v$ -Richtung und zwar, wenn wir verabreden, dass wir immer die äussere Normale nehmen wollen, haben wir auf 1 die Richtung  $(-v)$  als Normalenrichtung zu wählen usw.. Setzen wir all

dies in  $\int \frac{\partial \varphi}{\partial u} ds$  ein, so wird

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \int \frac{\partial \varphi}{\partial u} ds &= - \int \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{A}{B} du + \int \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{B}{A} dv + \int \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{A}{B} du - \int \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{B}{A} dv \\
 &= \int_{u_1}^{u_2} \left( \varphi_v \frac{A}{B} \right)_v du + \int_{v_1}^{v_2} \left( \varphi_u \frac{B}{A} \right)_u dv \\
 &= \iint (\varphi_v \frac{A}{B})_v du dv + \iint (\varphi_u \frac{B}{A})_u du dv \\
 &= \iint du dv \left[ (\varphi_v \frac{A}{B})_v + (\varphi_u \frac{B}{A})_u \right] \\
 &= \iint du dv A B \frac{1}{AB} \left[ (\varphi_v \frac{A}{B})_v + (\varphi_u \frac{B}{A})_u \right] \\
 &= - \iint du dv \Delta \varphi,
 \end{aligned}$$

Wenn  $\Delta \varphi$  wir setzen

$$(18) \quad \Delta \varphi = - \frac{1}{AB} \left[ (\varphi_v \frac{A}{B})_v + (\varphi_u \frac{B}{A})_u \right]$$

Und wir erkennen leicht, dass in der Tat die Inkompressibilitätsbedingung mit der Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  identisch ist.

### 3. Kapitel: Minimalflächen.

#### §71: Die Minimalflächen als Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung.

Wir haben in dem letzten Kapitel Geometrie auf einer Fläche getrieben. Diesen Standpunkt verlassen wir jetzt und wenden uns nun zur Geometrie im dreidimensionalen euklidischen Raume. Da wollen wir ein einfaches Problem formulieren. Wir wollen versuchen, ein Flächenintegral zum Minimum zu machen, wobei zum Vergleich alle Funktionen zugelassen werden, die durch eine gegebene Kurve hindurchgehen. Es sind also nun nicht mehr die Flächen gegeben, sondern gerade aus ihren Randwerten und einer Eigenschaft gesucht. Dabei handelt es sich offenbar um ein definites Problem, denn man kann sicher für die Oberfläche eine untere Schranke angeben. Man



projiziere nämlich die gegebene Kurve in eine Ebene. Dabei kann man die Ebene sicher so wählen, dass die Projektion nicht grösser als das Original ist. Und nun schneidet man aus der Projektion ein kleines beliebiges Stück heraus. Dann hat man in dem Rest bestimmt eine untere Schranke für die Grösse des Originalen.

Unser Problem ist nun merkwürdigerweise schwieriger als das von Dirichlet. Das hat folgenden Grund: Um das Problem in ein solches mit nur zwei Variablen zu verwandeln, liegt es nahe, sich auf solche Gebiete zu beschränken, in denen man  $x, y$  als Parameter einführen und nach  $z$  auflösen kann. Das lässt sich aber schon nicht erreichen wenn die betrachtete Fläche an einer Stelle senkrecht zur  $xy$ -Ebene steht. Wir wollen uns also auf den Fall beschränken, dass unsere betrachtete Kurve eine konvexe Projektion auf die  $xy$ -Ebene besitzt. Insbesondere ist dann die Projektion von selbst doppelpunktfrei. Bei der Berechnung des Oberflächenintegrals handelt es sich nun um das Integral

$$(1) \quad \iint \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv .$$

Für unsern Fall nehmen wir also

$$(2) \quad u = x , \quad v = y .$$

Dann wird, wenn wir noch

$$(3) \quad z_x = p , \quad z_y = q$$

setzen,

$$(4) \quad E = 1 + p^2 , \quad F = pq , \quad G = 1 + q^2 ,$$

und das Integral (1) geht über in

$$(5) \quad \iint \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy .$$

Wir müssen also eine Funktion  $z$  so bestimmen, dass

$$(6) \quad \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy = \text{Min}$$

wird, wobei die Funktion  $z$  auf dem Rande, also in allen Punkten der vorgegebenen Kontur, vorgegebene Werte hat. Dadurch ist auch die Kontur selbst festgelegt; denn wir brauchen je nur über der Berandung des konvexen Gebietes der  $xy$ -Ebene in jedem Punkte das Lot zur Ebene zu errichten und ihm die Länge  $z$  zu geben.

Nun werden wir, wenn wir variieren, sehen, dass ein wesentlich komplizierterer Ausdruck für  $\Delta\varphi$  sich ergeben wird. Das liegt daran, dass früher ein algebraischer Ausdruck zu variieren war, während jetzt eine Quadratwurzel vorhanden ist. Sie erschwert den Algorithmus ausserordentlich. Wir wollen daher nach einer anderen als der bisherigen Variationsmethode vorgehen. Da kommt man durch einen einfachen Ansatz zum Ziel. Wir wollen annehmen, dass unsere Fläche  $\mathcal{F}$  in Nachbarflächen eingebettet sei, und zwar so, dass entsprechende Punkte auf der Normalen auf der Ausgangsfläche liegen. Es soll also die Gesamtheit der Flächen aus  $\mathcal{F}$  dadurch hervorgehen, dass wir auf den Normalen auf  $\mathcal{F}$  einen gewissen kleinen Abstand abtragen. Dann erhalten wir die Flächenschar  $\mathcal{F} + \varepsilon f(u, v) \mathcal{S}$ . Das ist natürlich nicht die allgemeinste Einbettung; die wäre aber auch unserm Problem gar nicht angemessen. Es ist zwar eine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn die Flächen ohne Rücksicht auf ein Parameternetz aufeinander beziehen; aber die Oberfläche ist ja unabhängig von der speziellen Einführung eines Parameternetzes.

Wir setzen die Funktion  $\varphi$  auf dem Rande der Flächen gleich Null, setzen also

$$(7) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F} + \varepsilon \varphi \mathcal{S}.$$

Dann wird

$$(8) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}^2 \approx \mathcal{F} + 2\varepsilon \varphi \mathcal{F}_u \mathcal{S}_u = \mathcal{F} + 2\varepsilon \varphi \mathcal{L}$$

Dabei soll das Zeichen  $\approx$  bedeuten, dass wir die Glieder

von höherer als erster Ordnung in  $\varepsilon$  vernachlässigen.

Ganz analog findet man

$$(9) \quad \tilde{F} \cong F + 2\varepsilon \varphi M,$$

$$(10) \quad \tilde{G} \cong G + 2\varepsilon \varphi N.$$

Jetzt berechnen wir den Ausdruck  $\sqrt{EG - F^2}$ .

Dann erhalten wir einen Ausdruck der Form  $\sqrt{C_0 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2}$

Setzen wir  $C_0 \neq 0$  voraus, so erhalten wir

$$(11) \quad \sqrt{C_0 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2} = \sqrt{C_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C_1}{C_0} \varepsilon\right)$$

Diese Formel haben wir anzuwenden. Wir haben also den

Radikanten zu entwickeln nach  $\varepsilon$ , erhalten also

$$(12) \quad \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 \cong EG - F^2 + (LG + NE - 2FM)2\varepsilon\varphi,$$

also nach unserer Überlegung

$$(13) \quad \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \cong \sqrt{EG - F^2} \left(1 + \frac{LG + NE - 2FM}{EG - F^2} \varepsilon \varphi\right)$$

Wir erhalten also

$$(14) \quad \iint (\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} - \sqrt{EG - F^2}) du dv \\ \cong \varepsilon \iint \varphi H \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Dabei ist

$$(15) \quad H = \frac{LG + NE - 2MF}{EG - F^2}$$

die mittlere Krümmung bis auf den Faktor 2. Wir erhalten

also, wenn wir durch  $\varepsilon$  dividieren und zur Grenze  $\varepsilon \rightarrow 0$

übergehen

$$(16) \quad \delta \iint do = \iint \delta \varphi H do$$

Dabei ist das Gleichheitszeichen jetzt streng; denn die Glieder, die quadratisch in  $\varepsilon$  waren, sind nach Division durch  $\varepsilon$  mindestens linear geworden. sind also bei dem Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  fortgefallen.

Es drückt sich also das Flächenintegral durch die mittlere Krümmung aus. Wir erhalten also aus (16) für die Minimalflächen

$$(17) \quad H = 0.$$

oder nach (15)

$$(18) \quad L G + N E - 2 M F = 0$$

Für die zweiten Fundamentalgrößen  $L, M, N$  gilt dann

$$(19) \quad L = \lambda r, \quad M = \lambda s, \quad N = \lambda t.$$

wobei  $\lambda$  eine Konstante ist, und wobei

$$(20) \quad r = z_{xx}, \quad s = z_{xy}, \quad t = z_{yy}.$$

Dann geht die Gleichung (18), wenn wir noch (4) berücksichtigen, über in die Differentialgleichung für  $z$ :

$$(21) \quad z(1+q^2) + z(1+p^2) - 2s pq = 0$$

Das ist also die Differentialgleichung der Minimalfläche. Diese Gleichung ist schwieriger als die Gleichung  $\Delta\varphi = 0$ , denn dort hatten wir eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Gleichung (21) ist auch linear in  $r, s, t$ , aber die Koeffizienten sind selbst Funktionen von  $z$ . Und in diesen Faktoren liegen Schwierigkeiten. Wir wollen darauf aber nicht weiter eingehen.

-----

§72: Minimalflächen als Flächen konformer

Abbildung.

Wir wollen nun Minimalflächen nicht nur solche Flächen nennen, die bei gegebener Kontur die kleinste Oberfläche haben, sondern allgemein die, für die  $H = 0$  ist. Diese Flächen stehen nun in interessanter Beziehung zur konformen Abbildung und zu den isotropen Kurven. Wir behaupten da folgenden Satz:

Ausser der Kugel sind die Minimalflächen die einzigen Flächen, bei denen die sphärische Abbildung konform ist.

Zum Beweis betrachten wir das Netz der Krümmungslinien auf der Minimalfläche und deren sphärisches Bild auf der Kugel. Da es sich um ein orthogonales Netz handelt, ~~hat~~ hat das Linienelement die Form

$$(1) \quad ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

und das sphärische Bild, das nach früheren Überlegungen ebenfalls orthogonal sein muss, hat das Linienelement

$$(2) \quad d\sigma^2 = e du^2 + g dv^2$$

Wir haben nun gezeigt, dass die Abbildung dann und nur dann konform ist, wenn die Linienelemente proportional sind. Es muss also sein

$$(3) \quad \frac{e}{E} = \frac{g}{G}$$

Es war nun nach den Formeln von Rodrigues

$$(4) \quad d\xi + \frac{1}{R} d\zeta = 0,$$

Daraus folgt

$$\xi_u + \frac{1}{R_1} \zeta_u = 0,$$

also

$$\xi_u = -\frac{1}{R_1} \zeta_u,$$

oder

$$e = \frac{1}{R_1^2} E,$$

oder

$$(5) \quad \frac{e}{E} = \frac{1}{R_1^2}.$$

Ganz entsprechend findet man, indem man (4) durch  $dv$  dividiert

$$(6) \quad \frac{K}{G} = \frac{1}{R_2^2}$$

Setzen wir (5) und (6) in (3) ein, so finden wir, dass die Abbildung dann und nur dann konform ist, wenn gilt

$$(7) \quad \frac{1}{R_1^2} = \frac{1}{R_2^2}$$

Diese Gleichung besitzt zwei Lösungen, einmal

$$(8) \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$$

d.h. die Fläche besteht nur aus Nabelpunkten, ist also, wenn wir von der Ebene absehen, eine Kugel.

Zweitens aber ist auch Lösung der Gleichung (7)

$$(9) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

oder

$$(10) \quad H = 0$$

womit unser Satz bewiesen ist.

-----8-----

### §73: Weitere Sätze über Minimalflächen.

=====

1.)

Betrachten wir die Asymptotenrichtungen auf einer Minimalfläche. Da haben wir zunächst zu überlegen, ob es dort überhaupt reelle solche Richtungen gibt. Da müssen wir von der Ebene absehen, die ja auch Minimalfläche ist. Dann behaupten wir folgenden Satz:

Die Asymptotenrichtungen auf Minimalflächen stehen SENKRECHT AUF EINANDER.

Wir haben früher nachgewiesen, dass bei jeder Fläche die Krümmungsrichtungen den Winkel zwischen den Asymptotenrichtungen halbieren. Ferner haben wir für den Winkel zwischen den Asymptotenrichtungen und den Krümmungsrichtungen gefunden

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

Da aber die Krümmungsradien auf den asymptotischen Richtungen entgegengesetzt gleich sind, wird

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 1$$

also

$$(2) \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{q.e.d.}$$

2.)

Wir setzen voraus, dass unsere Fläche analytisch ist. Dann hat es Sinn, von isotropen Richtungen zu reden. Wir behaupten den Satz:

Die isotropen Richtungen auf einer Minimalfläche sind einander konjugiert.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus (1). Wir wissen ja, dass alle Richtungen, die harmonisch zu den Asymptotenrichtungen liegen, einander konjugiert sind. Weil aber nach (1) die Asymptotenrichtungen senkrecht aufeinander stehen, folgt unmittelbar, dass die isotropen Richtungen harmonisch zu den asymptotischen liegen müssen.

Wir wollen nun auf der Minimalfläche die isotropen Kurvenscharen als Parameterlinien einführen. Dann folgen sofort einige Relationen. Aus der Tatsache, dass wir die isotropen Linien als Parameterlinien wählen, folgt

$$(3) \quad E = G = 0,$$

so dass sich das Linienelement in der Form schreiben lässt

$$(4) \quad ds^2 = 2 F du dv.$$

Kerner wissen wir, dass in unserem Falle die isotropen Richtungen konjugiert sind. Daraus folgt

$$(5) \quad \xi_{uv} = 0,$$

wobei  $\xi$  die Flächennormale ist. Wir behaupten, dass sogar gilt

$$(6) \quad \zeta_{uv} = 0.$$

Um das nachzuweisen, differenzieren wir  $E = \zeta_u^2$  nach  $v$  und erhalten

$$(7) \quad \zeta_u \zeta_{uv} = 0.$$

Differenzieren wir  $G = \zeta_v^2$  nach  $u$ , so folgt

$$(8) \quad \zeta_v \zeta_{uv} = 0.$$

Nehmen wir an, dass die Fläche reell sei; dann wissen wir, dass der Vektor  $\xi$  existiert. Und es folgt aus (5), (7) und (8), da  $\xi$ ,  $\zeta_u$ , und  $\zeta_v$  nicht in einer Ebene liegen

$$(9) \quad \zeta_{uv} = 0.$$

Dieser Schluss versagt, sobald die Fläche nicht mehr reell ist. Aber auch im Komplexen können wir die Gleichung (6) beweisen. Auch da haben wir die drei Gleichungen (5), (7), (8). Wenn wir dann zeigen, dass

$$(10) \quad (\xi, \zeta_u, \zeta_v) \neq 0$$

ist, sind wir fertig. Zu dem Zwecke schreiben wir die Gleichung (10) um in

$$(11) \quad (\xi, \zeta_u, \zeta_v) = \xi (\zeta_u \times \zeta_v).$$

Nun ist

$$(12) \quad \xi = \frac{\zeta_u \times \zeta_v}{|\zeta_u \times \zeta_v|}$$

Diese Gleichung hat auch im Komplexen einen Sinn, da alle diese Formeln analytisch sind. Setzen wir (12) in (11) ein, so wird

$$(13) \quad (\xi, \zeta_u, \zeta_v) = |\zeta_u \times \zeta_v|,$$

und  $|\zeta_u \times \zeta_v|$  ist in der Tat im Komplexen von Null verschieden.

Aus (6) folgt aber nun, dass  $\zeta$  die Form haben muss

$$(14) \quad \zeta = \gamma(u) + \delta(v).$$



Wir behaupten nun, dass die Kurven  $y(u)$  und  $\bar{y}(u)$  Minimalkurven sind. Wir haben in §38 gesehen, dass Flächen, die sich in der Form (12) darstellen lassen, Translationsflächen sind. Wir sehen also:

Die Minimalflächen sind die Translationsflächen isotroper Kurven.

Es erhebt sich nun die Frage, ob auch umgekehrt alle Translationsflächen Minimalflächen sind. Und das ist in der Tat der Fall; denn wir wissen allgemein, dass bei Translationsflächen die Kurven  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  ein konjugiertes Netz bilden. Das haben wir in §38 bewiesen. Wir haben also in den Translationsflächen solche Flächen vor uns, auf denen die isotropen Richtungen konjugiert sind, d.h. solche Flächen, bei denen die asymptotischen Richtungen symmetrisch zu den isotropen stehen. Es stehen also die Asymptoten senkrecht aufeinander, also ist  $H = 0$ ; d.h. wir haben es mit Minimalflächen zu tun.

Schliesslich ergibt sich noch das Problem, wie man aus diesen unübersichtlichen Gebilden, die wir bisher als Minimalflächen kennengelernt haben, etwas Reelles herausbekommen kann. Da zeigt es sich, dass man, um die reellen Minimalflächen zu bekommen, den Begriff der konjugiert komplexen Zahl heranziehen muss. Setzen wir nämlich

$$(15) \quad z(u) = \bar{y}(u)$$

und setzen wir diesen Wert in (14) ein, so wird

$$(16) \quad \xi = y(u) + \bar{y}(u) = 2 \Re y(u).$$

ist ein System von drei analytischen Funktionen. Zu jeder von ihnen nehmen wir die konjugiert komplexe und setzen sie sich dann gleich den dreielementsprechenden Funktionen von  $z(u)$ .

Nun wollen wir zeigen, dass, wenn  $y(u)$  eine Minimalkurve ist, auch  $\bar{y}(u)$  eine solche ist. Das folgt aber

unmittelbar. Da es sich um isotrope Richtungen handelt, ist

$$(17) \quad \zeta^2 = 0,$$

oder nach (14)

$$\gamma'^2 = 0,$$

d.h.

$$\gamma = \text{const}$$

Damit ist aber auch

$$\bar{\gamma} = \text{const}$$

d.h.

$$(18) \quad \bar{\gamma}' = 0$$

D.h. aber nun umgekehrt, dass auch  $\bar{\gamma}'(\bar{u})$  eine isotrope Kurve, also eine Minimalkurve ist.

Wir haben also als Rezept dafür, aus komplexen Minimalflächen reelle herauszubekommen, folgendes: Wir bringen die Fläche auf die Form (14). Dann setzen wir  $\gamma(u) = \bar{\gamma}(\bar{u})$  und haben damit die reellen unter den Minimalflächen. Wir können also allgemein sagen:

Eine Minimalfläche ist dann reell, wenn sie mit jedem Punkte auch den konjugiert komplexen enthält.

Wir wissen nun ferner, dass durch jeden Punkt der Fläche zwei und nur zwei isotrope Richtungen gehen. Setzen wir  $v = 0$ , so sehen wir, dass  $\gamma'(u)$  eine isotrope Richtung ergibt. Es muss aber, wenn die Fläche reell sein soll, auch die konjugierte Kurve  $\bar{\gamma}'(\bar{u})$  auf der Fläche in dem Punkte vorhanden sein. Wir sehen also, da es nicht mehr als zwei isotrope Richtungen durch einen Punkt geben kann, dass  $\gamma$  und  $\bar{\gamma}$  die beiden einzigen Richtungen dieser Art sind und dass sie konjugiert sind.

## VI. Abschnitt: Riemannsche Geometrie.

Wir wollen uns nun am Ende der Vorlesung mit einem der erfolgreichsten Kapitel der Differentialgeometrie, mit der Riemannschen Geometrie beschäftigen. Wir schicken zunächst einige historische Bemerkungen vorweg.

Grundlegend für diese Theorie ist die im Jahre 1854 erschienene Arbeit von Riemann gewesen<sup>1)</sup>. Es handelt sich dabei um einen Habilitationsvortrag, der damals aber von den wenigsten Mathematikern verstanden und beachtet wurde. Diese Arbeit ist neuerdings, als Einstein die Relativitätstheorie aufstellte, wieder hervorgehört worden und von Weyl als Sonderdruck herausgegeben worden. Es ist aber nicht ganz richtig, wenn man behauptet, dass die Mathematiker der Relativitätstheorie vorgearbeitet hätten; denn auch Riemann hat seine Arbeit aus physikalischen Gesichtspunkten begonnen.

### 1. Kapitel: Grundlagen.

Der Gedanke, von dem Riemann ausging, war folgender: Wir betrachten ein Kontinuum in  $n$  Dimensionen, d.h. eine Mannigfaltigkeit von  $n$  Variablen  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , die in einem gewissen Bereiche variieren. Dann nennen wir jedes Wertesystem  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  einen  $n$ -dimensionalen Punkt.

Schon diese Mannigfaltigkeit gibt zu topologischen Untersuchungen Anlass. Es gibt gewisse Eigenschaften, die ein solches  $n$ -dimensionales Kontinuum mit dem gewöhnlichen dreidimensionalen euklidischen Raum gemeinsam hat, und zwar handelt es sich dabei um topologische Eigenschaften. Ein solches  $n$ -dimensionales Kontinuum machen wir dadurch zu einem geometrischen Raum, dass wir schrittweise eine Reihe von Forderungen erheben,

---

1) Riemann, Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen.

die nach und nach dem Kontinuum eine immer charakteristische Struktur aufprägen.

#### §74: Die Relativ - Metrik.

Riemann ging von der Vorstellung aus, dass auch unser gewöhnlicher dreidimensionaler Raum durch ein solches Kontinuum repräsentiert werde. Da lag es nahe, das sog. Nahwirkungsprinzip einzuführen. Ein Beobachter in einem Punkte des Raumes kann in diesem Längen und Winkel messen, und zwar so, wie wir es im euklidischen Raume gewohnt sind. Es ist aber nicht einzusehen, dass dieser Beobachter von seinem eigenen Standpunkte aus erfahren kann, was für Messungen ein in einem andern Punkte befindlicher Beobachter macht. Man kann nur in der Umgebung eines Punktes Messungen anstellen. Dabei wollen wir nun immer, wenn wir von Längen reden, an Vektoren, etwa an Geschwindigkeiten denken. Solche Vektoren kann man in jedem Punkte definieren, kann dabei etwa von der Vorstellung ausgehen, dass die Komponenten des Vektors von einem Parameter  $t$  abhängen, kann sie also etwa durch die Differentialquotienten  $\frac{dx^i}{dt}$  dargestellt denken. Man will nun die Richtungen in dem Punkte miteinander vergleichen. Es handelt sich also darum, zwischen den Geschwindigkeiten  $\frac{dx^i}{dt}$  eine vernünftige Relation herzuleiten. Als Länge der Vektoren kann man natürlich irgendeine willkürliche Funktion der Richtung vorschreiben. Wie aber kann man, wenn zwei Geschwindigkeiten, etwa  $\frac{dx^i}{dt}$  und  $\frac{\delta x^i}{\delta t}$ , gegeben sind, für diese beiden Geschwindigkeiten einen Winkel definieren? Das scheint zunächst auch noch ganz willkürlich zu sein für einen Punkt. Es wird aber eingeschränkt durch das Drehungs- postulat, das besagt: Das System von Ableitungen, das die Richtungen in dem betrachteten Punkte angibt, ist mit Hilfe unserer Koordinaten gebildet. Führen wir ein anderes Koordinatensystem ein, so bekommen wir andere

Ableitungen, denn es sind die Komponenten der Ableitungen abhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Wenn man nun aber den Geschwindigkeiten eine Grösse und zwei Geschwindigkeiten einen Winkel zuordnen will, so verlangt man natürlich, dass diese beiden Begriffe nicht vom Koordinatensystem abhängen. Das ergibt schon eine gewisse formale Einschränkung. Aber auch die ist noch nicht ausreichend. Eine befriedigende Einschränkung erhält man, das wollen wir ohne Beweis hinnehmen, wenn man nach dem Drehungspostulat annimmt, dass das System aller Geschwindigkeitsgrössen und -Winkel um einen Punkt sich auf sich selber abbilden lässt. Für  $n = 2$ , d. h. in der Ebene, besagt dieses Postulat nicht viel. Entscheidend aber wird es schon im Raum und in höheren Dimensionen. Im Raum stellt dieses Postulat das Helmholtz-Liesche Raumproblem dar. Es besagt da, dass es nur eine solche Möglichkeit der Winkeleinführung gibt. Es ist mit einer Methode gleichwertig, die wir schon aus der Flächentheorie kennen, nämlich die, das Quadrat des Betrages eines Vektors einzuführen und den Cosinus des Neigungswinkels. Es zeigt sich, dass man jedem Punkte des Kontinuums ein System von Zahlengrössen  $\varepsilon_{ik}$  zuordnen kann, von denen man verlangt

$$(1) \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

und dass man mit Hilfe dieser Zahlen Längen und Winkel ausdrücken kann. Wir setzen

$$(2) \quad \frac{dx^i}{dt} = \xi^i, \quad \frac{\delta x^i}{\delta t} = \gamma^i,$$

und die diesen Geschwindigkeiten entsprechenden Systeme nennen wir  $\xi$  und  $\gamma$ . Dann lässt sich zeigen, dass sich die Längen und Winkel durch die Grössen  $\varepsilon_{ik}$  ausdrücken lassen:

$$(3) \quad \xi^2 = \sum \varepsilon_{ik} \xi^i \xi^k$$

$$(4) \quad \langle y, y \rangle = \sum_{i,k} g_{ik} \xi^i \eta^k$$

Daraus folgt dann sofort wegen

$$(5) \quad \frac{\langle y, y \rangle}{\sqrt{g^2} \sqrt{y^2}} = \cos(\xi, \eta),$$

dass auch die Winkel sich durch die Grössen  $g_{ik}$  ausdrücken lassen.

Wir nehmen also ohne Beweis hin, dass diese Art, Längen und Winkel einzuführen, die einzig vernünftige ist. Dabei ist von den Grössen  $g_{ik}$  noch vorausgesetzt, dass ihre Determinante nicht verschwindet:

$$(6) \quad |g_{ik}| \neq 0.$$

Wir wollen uns die Vernünftigkeit dieser Einführung am Beispiel des euklidischen Raumes klarmachen. Dann geht  $g_{ik}$  in die Einheitsmatrix über ( $g_{ik} = 1$  für  $i=k$ ,  $g_{ik} = 0$  für  $i \neq k$ ) und es reduziert sich der Ausdruck (5) auf die Quadratsumme, wie zu erwarten war. Entsprechend gehen das innere Produkt und der Winkel in die uns wohlbekannten euklidischen Ausdrücke über.

Wir haben also bis jetzt gesehen, dass jedem Punkte in der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit eine Grösse  $g_{ik}$  zugeordnet wird, welche Längen und Winkel in diesem Punkte reguliert.

Nun handelt es sich darum, die Metrik in einem Punkte mit der in einem Nachbarpunkte zu vergleichen.

#### §75: Das infinitesimale Uebertragungsprinzip.

Man wird sinngemäss verlangen, dass der Beobachter in  $P$  feststellen kann, was ein Beobachter in einem Nachbarpunkte  $P^*$  misst, und dass er die beiden Messungen der beiden Punkte vergleichen kann. So kommt man zu dem infinitesimalen Uebertragungsprinzip. Es soll die Antwort auf die Frage geben: Wann heissen zwei Vektoren, die in benachbarten Punkten abgetragen werden, gleich?

Da ist nun das Nächstliegende, so vorzugehen: Im euklidischen Raume heissen die Vektoren ja dann gleich, wenn ihre Komponenten gleich sind. Diese Definition können wir aber nicht in unsere Geometrie übernehmen; denn die Forderung der Gleichheit der Komponenten erfüllt nicht das Brehungspostulat, also die Unabhängigkeit vom Koordinatensystem. Da wir es mit einem infinitesimalen System zu tun haben, wird man ein Konvergenzprinzip einschalten. Man wird sagen: <sup>1)</sup> Zwei Vektoren die in benachbarten Punkten gemessen werden, sind dann gleich, wenn ihre Komponenten fast gleich sind. Da muss man aber sofort die Grösse des Fehlers angeben. Die beiden betrachteten Vektoren mögen die Komponenten  $\xi^i$  (in  $P$ ) und  $\xi^{i*}$  (in  $P^*$ ) haben. Die Vektoren selbst mögen  $\xi$  und  $\xi^*$  heissen. Dann muss man wieder eine Reihe von Postulaten verlangen. Zunächst setzen wir Linearität voraus, d. h. wir verlangen, dass aus

$$\xi = \xi^*$$

folgt

$$\alpha \xi = \alpha \xi^*$$

und

$$\xi^2 = \xi^{*2}.$$

Dabei ist  $\alpha \xi$  ein Vektor, der dadurch entsteht, dass wir alle Komponenten  $\xi^i$  mit  $\alpha$  multiplizieren.

Ferner wird man verlangen müssen, dass, wenn gilt

$$\xi = \xi^*, \quad \eta = \eta^*,$$

auch die Winkel zwischen  $\xi, \eta$  und  $\xi^*, \eta^*$  gleich sein sollen, denn die Winkel werden ja durch Längen gegeben, weil die inneren Produkte durch die Längen gegeben sind.

<sup>1)</sup> Man spricht in diesem Zusammenhange auch von dem Levi-Civitaschen Parallelismus. Ich halte diese Bezeichnungswiese aber nicht für sehr glücklich, weil es sich nicht nur darum handelt, zu untersuchen, wann zwei Geschwindigkeiten gleich gerichtet sind, sondern auch darum, wann die gleiche Grösse haben. Der Ausdruck Parallelismus ist also ein wenig irreführend.

Es genügt also, damit die Winkel gleich sind, dass aus

$$\xi = \xi^*, \quad \eta = \eta^*$$

folgt

$$\xi \eta = \xi^* \eta^*.$$

Damit haben wir eine metrische Abbildung der Vektoren um  $P$  auf die um  $P^*$  formuliert. Natürlich müssen wir noch verlangen, dass für  $P^* \rightarrow P$  auch gilt  $\xi^* \rightarrow \xi$ . Aus diesen Forderungen folgt nun, dass der Vektorraum um  $P$  mit dem um  $P^*$  in affinen Zusammenhange steht. Eine affine Abbildung ist ja dadurch gekennzeichnet, dass man bei ihr immer die Metrik in geeigneter Weise übertragen kann. Nicht trivial ist, dass die affinen Abbildungen die einzigen Abbildungen sind, die unsere Voraussetzungen erfüllen.

Wir haben noch zu überlegen, was die Forderung, dass mit den Punkten auch die Vektoren zusammenfallen sollen, liefert. Wir wissen, dass eine affine Abbildung durch eine Matrix dargestellt wird, zu deren Vorgabe ein Koordinatensystem in  $P$  und in  $P^*$  eingeführt werden muss. Es wird also vorausgesetzt, dass zwischen den Vektor-komponenten in  $P$  und in  $P^*$  eine affine Abbildung besteht, wobei die Komponenten  $a_{ik}$  natürlich Ortsfunktionen sind, und zwar solche, dass die Abbildung zur Identität wird, wenn  $P^*$  gegen  $P$  geht. Es sei nun  $\xi^*$  ein Vektor in  $P^*$ , der dem Vektor  $\xi$  in  $P$  entspricht,  $\xi^*$  sei also der Bildvektor von  $\xi$ . Dann hat  $\xi^*$  die Komponenten  $\frac{dx^{i*}}{dt}$ . Diese Komponenten müssen sich also affin aus denen von  $\xi$  zusammensetzen. Es muss also eine Relation geben

$$(1) \quad \frac{dx^{i*}}{dt} = \sum_k a_k^i \frac{dx^k}{dt}.$$

Dabei ist

$$(2) \quad a_k^i = e_k^i + t b_k^i$$

wo  $e_k^i$  die Einheitsmatrix ist, und wobei der Parameter  $t$  so normiert ist, dass für  $t = 0$   $P^*$  in  $P$  übergeht.



Schreiben wir wieder  $\zeta^i$  und  $\zeta^k$ , so heisst also die Gleichung (1)

$$(3) \quad \begin{aligned} \zeta^{i*} &= \sum_k a_k^i \zeta^k + t \sum_k b_k^i \zeta^k \\ &= \zeta^i + t \sum_k b_k^i \zeta^k \end{aligned}$$

oder, wenn wir  $\zeta^i$  nach links schaffen und durch  $t$  dividieren

$$(4) \quad \frac{\zeta^{i*} - \zeta^i}{t} = \sum_k b_k^i \zeta^k$$

Links steht so etwas wie ein Differentialquotient.

Für  $t = 0$ , also für  $P = P$  geht diese Gleichung über in

$$(5) \quad \frac{d\zeta^{i*}}{dt} = \sum_k b_k^i \zeta^k$$

Wir sehen also, dass sich die Komponentenänderung linear durch die Komponenten selbst ausdrücken lässt. Diese Linearität ist äquivalent mit Affinität.

Dieser Zusammenhang lässt folgende Deutung zu:

Wir denken uns eine Kurve durch  $P$  und  $P$  gelegt und in jedem Punkte der Kurve einen Vektor abgetragen.

Dann können wir die Gleichheit der Vektoren dahin ausdrücken, dass der Vektor stationär ist. Wir definieren also:

Wir nennen einen Vektor nur dann stationär, in einem Punkte längs einer von einem Parameter  $t$  abhängenden Kurve, wenn sich die Differentialquotienten seiner Komponenten nach diesem Parameter linear aus den Komponenten in der in (5) angegebenen Weise zusammensetzen.

Es fragt sich nun, ob auch etwa die Grössen  $b_k^i$  den Punkten angeheftete Grössen sind wie die  $g_{ik}$ . Wir können schon jetzt sagen, dass das wahrscheinlich nicht der Fall sein wird; denn wir haben ja den Vektor in einer bestimmten Richtung differenziert. Wenn wir das für verschiedene Richtungen tun, so werden sich die  $b_k^i$  ändern. Die affine Abbildung ist ja davon abhängig, in welcher Richtung wir zu einem benachbarten Punkte

übergeben. Sie hängt ja nicht von der Lage des Punktes selbst ab, ist also keine Ortsfunktion. Es muss also in den Grössen  $b_k^i$  ein Richtungsbestandteil stecken. Wir werden noch zu untersuchen haben, wie sich die Grössen  $b_k^i$  mit der Richtung ändern.

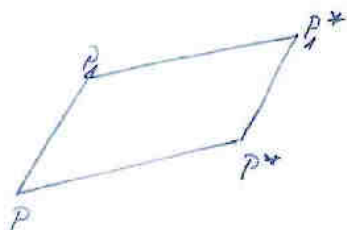
An diesem Parallelismus schliesst sich schon eine gewisse Geometrie an. Das ist nun zra noch nicht die Riemannsche Geometrie; man wird auf sie geführt bei der Untersuchung des sog. Gruppenraumes. Wenn ein gewisses System von Transformationen eine Gruppe bildet, die ausserdem noch gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzt, dann spricht man von einer kontinuierlichen Gruppe. Darauf lässt sich dann eine Geometrie aufbauen, die noch von ganz allgemeinem Typus ist und die man nach Cartan und Schouten nennt.

Will man nicht bei dieser allgemeinen Geometrie stehenbleiben, sondern zur Riemannschen Geometrie kommen, dann kommt noch eine weitere Forderung hinzu, nämlich die der Schliessung des Parallelogrammes. Diese Forderung ist bei weitem nicht bei allen Gruppenräumen erfüllt. Man kann sagen, dass die Schliessung des Parallelogrammes die axiomatische Grundtatsache der affinen Geometrie ist. Wir Hilfe dieser Schliessungseigenschaft kann man die Gleichheit von Vektoren definieren, ohne auf Längen und Winkel einzugehen. Man kann dann so sagen:

Zwei Vektoren AB und CD heissen dann gleich, wenn ABCD ein Parallelogramm ist.

Es kann also die Gleichheit als eine Schliessungseigenschaft aufgefasst werden. Es folgt dann auch ohne weiteres, dass, wenn in diesem Sinne  $AB = CD$  ist, auch automatisch  $AC = BD$  ist. Von dieser Schliessungseigenschaft kann man also als von einer symmetrischen Uebertragung reden.

Gegeben sei ein Vektor in  $P$ . Man transformiert ihn



stationär nach  $P^*$ . Dann betrachten wir einen zu  $P$  infinitesimal benachbarten Punkt  $P_1$  und einen ebensolchen zu  $P^*$ ,  $P_1^*$ . Dann besagt die Schliessungseigenschaft, dass, wenn  $PP_1$  und  $P^*P_1^*$  gleich sind, auch  $PP^*$  und

$P_1P_1^*$  gleich sind.

Diese Schliessungseigenschaft wird genau von der kommutativen Gruppe erreicht.

Das Axiom der symmetrischen Uebertragung müssen wir also hinzunehmen, um die Uebertragung in richtiger Weise zu koppeln. Damit können wir schon etwas über die Richtungsabhängigkeit von  $b_{ij}^1$  aussagen. Es muss die Uebertragung eines Vektors in der angegebenen Weise vor sich gehen. Diese Untersuchungen sind besonders von Weyl gefördert worden.

Wir wollen nun ohne Rechnung angeben, wie man von der Weylschen Geometrie zur Riemannschen kommt. Es fehlt uns noch eine Metrik. Wir haben bisher nur die Möglichkeit gefordert, dass ein Beobachter seine eigenen Messungen in einem Punkte mit denen eines Beobachters in einem benachbarten Punkte vergleichen kann. Jetzt nimmt Riemann noch die Länge hinzu. Und das ist das, was Weyl Riemann mit Recht vorwirft. Riemann verlässt die Nahwirkungstheorie und macht eine Festsetzung die für alle Punkte des Kontinuums gleichmässig gelten soll. Es sollen die Längen von Vektoren universelle Größen sein, soll also möglich sein, von zwei Vektoren, die an zwei ganz willkürlichen Punkten angreifen, aussagen zu können, dass sie gleich lang sind. Nach unseren bisherigen Betrachtungen kann es vorkommen, dass, wenn man einen Vektor längs einer geschlossenen

Kurve transportiert, man nach einem vollen Umlauf einen ganz anderen Vektor, sowohl nach Richtung als auch nach Grösse, erhält. Die Riemannsche Geometrie verlangt dann, dass der Endvektor jedenfalls dieselbe Länge hat wie der Ausgangsvektor. In der Weylschen Geometrie, die dieses Postulat nicht kennt, können dann auch die Längen noch verschieden sein.

Wenn wir das haben, gibt nun die Riemannsche Geometrie automatisch eine Möglichkeit, die Parallelübertragung zu definieren. Wenn die Längenmessung universell ist, so werden wir unter der Länge einer Kurve das Integral

$$(6) \quad \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{g'^2(t)} dt$$

verstehen, wobei  $t$  der Kurvenparameter ist. Dann überträgt sich das Problem der geodätischen Linie in

$$(7) \quad \delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{g'^2(t)} dt.$$

Der Unterschied gegenüber der Weylschen Geometrie in der wir ja auch die Länge einer Kurve bestimmen können, ist der, dass es dort nur Sinn hat, von der Länge einer Kurve in der unmittelbaren Nachbarschaft eines Punktes zu reden. Sowie wir über diese Umgebung hinausgehen, wird die Länge ja, da wir uns in anderen Punkten befinden, anders definiert sein.

Wir wissen nun, dass die Mannigfaltigkeit der durch einen Punkt hindurchgehenden geodätischen Linien dieselbe ist wie die der von ~~ihm~~ ihm ausgehenden Geraden. Da liegt es nun auf der Hand, dass wir unser Übertragungsprinzip so wählen werden, dass sich das Bündel der durch einen Punkt gehenden geodätischen Linien genau so überträgt wie das der durch ihn gehenden Geraden. Betrachten wir eine geodätische Linie durch einen Punkt  $P$ , so soll sie auch für einen Punkt der Nachbarschaft geodätische Linie sein. Es

ist also ein Tangentialvektor an die geodätische Linie parallel zu einem in unmittelbarer Nachbarschaft an dieselbe geodätische Linie gelegten Tangentialvektor. Die geodätische Linie kann also aufgefasst werden als die Einhüllende aller derjenigen Vektoren, die aus einem Vektor entstehen, wenn wir ihn in seiner eigenen Richtung parallel verschieben. Wir müssen nun aber auch wissen, was wir unter Parallelverschiebung verstehen wollen, wenn der Vektor in anderer als seiner eigenen Richtung bewegt wird; in zwei Dimensionen würde da die Vorschrift heissen zwei Vektoren, die in zwei Punkten angreifen, sollen dann parallel sein, wenn sie mit der geodätischen Linie, die ihre Fusspunkte verbindet, gleich Winkel einschliessen. Will man sich da also ein System von gleichen Vektoren verschaffen, so sucht man sich die Vektoren auf, die gleiche Längen haben und die mit der geodätischen Linie, die ihre Fusspunkte verbindet, gleich Winkel einschliessen. Befinden wir uns nun aber in einem höherdimensionierten Raum, so lässt sich diese Parallelität von Vektoren nicht mehr so leicht fassen. Denken wir etwa an den dreidimensionalen Raum. Auch da können wir ja von geodätischen Linien reden, aber die Vektoren haben, auch wenn sie gleich lang sind und mit der geodätischen Linie durch ihre Fusspunkte denselben Winkel einschliessen, immer noch die Möglichkeit, sich um die geodätische Linie zu drehen. Es kommen also Torsionsschwierigkeiten hinzu. Wir müssen also noch eine Forderung hinzunehmen, die angibt, welche Erzeugende von dem jeweils von der geodätischen Linie überstrichenen Bogen wir herausnehmen wollen. Da hat man also von der geodätischen Linie überzugehen zur geodätischen Fläche. Diese ist aber nur jeweils für einen einzigen Punkt definiert. Sie wird überstrichen von der Gesamtheit der Vektoren, die eine Linearkombination der beiden in  $P$  und  $P'$  angetragenen parallelen Vektoren

sind. Im Falle der Ebene ist die Ebene selbst die geodätische Fläche. Dann heisst die Vorschrift so: Man wähle die Erzeugende des Kegels die mit der geodätischen Fläche den vorgeschriebenen Winkel einschliesst. Dadurch ist dann die Schar der parallelen Vektoren festgelegt. In höherdimensionierten Räumen verfährt man dann ganz entsprechend.

## 2. Kapitel: Der Tensorkalkül.

### §76: Kontravariante und Kovariante Vektoren.

Wir wollen nun nach diesen allgemeinen Betrachtungen nun dazu übergehen, den entsprechenden formalen Apparat aufzubauen. Da wollen wir zunächst eine Vereinfachung einführen. Wir wollen alle Summenzeichen dann fortlassen, wenn ein Index zweimal auftritt. Im allgemeinen wird dann dieser Index ebenso oft oben wie unten auftreten. Wir wollen also statt

$$\sum_{k=1}^n a_k^i x^k$$

schreiben

$$a_k^i x^k$$

Diese Vorschrift wird nur in ganz wenigen Fällen eine Ausnahme erleiden.

Diese neue Schreibweise hat zur Folge, dass wir die Länge eines Vektors kurz schreiben

$$(1) \quad \frac{ds^2}{dt^2} = \varepsilon_{ik} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^k$$

Dabei ist also in diesem Fall die Summation über  $i$  und  $k$  zu erstrecken. Ebenso schreibt sich dann das skalare Produkt zweier Vektoren

$$(2) \quad \xi \eta = \varepsilon_{ik} \xi^i \eta^k$$

Wir fragen nun, wie sich die Komponenten der Geschwin-

digkeit ändern, wenn wir das Koordinatensystem ändern.  
 Da liefert die Kettenregel der Differentiation

$$(3) \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{dy^k}{dt}$$

Diese Formel liefert also den Übergang von dem System  $x^i$  zu dem System  $y^k$ . Es tritt bei diesem Übergang also immer die Funktionaldeterminante der alten nach den neuen Größen auf. Wir setzen

$$(4) \quad \frac{\partial x^i}{\partial y^k} = a_k^i$$

so dass sich (3) schreiben lässt

$$(5) \quad \frac{dx^i}{dt} = a_k^i \frac{dy^k}{dt}$$

Wir setzen nun voraus, dass die Determinante  $|a_k^i|$  nicht verschwindet:

$$(6) \quad |a_k^i| \neq 0$$

so dass wir also auch vom System  $y$  auf das System  $x$  zurückgehen können. Dabei ist die Matrix  $(a_k^i)$  eine Funktion des Ortes.

Wir nennen ein System von Zahlen  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$  einen kontravarianten Vektor, wenn wir Veranlassung haben dieses System von  $n$  Zahlen bei einer Änderung des Koordinatensystemes so zu transformieren wie die Größen  $\frac{dx^i}{dt}$ , d. h. wenn die Transformationsregel lautet:

$$(7) \quad \xi^i = a_k^i \eta^k$$

wobei  $\eta^k$  die Komponenten im neuen System sind. Von diesem Transformationsgesetz wollen wir zunächst eine Gruppeneigenschaft zeigen. Wenn wir durch eine derartige Transformation das System  $x$  in das System  $y$  überführen, und wenn wir dann dieses neue System in ein anderes System  $z$  überführen, dann soll sich dasselbe ergeben

als wenn wir direkt vom System  $x$  auf das System  $z$  übergingen. Das müssen wir, wenn unsere Definition einen Sinn haben soll, verlangen. Die den Grössen  $a_k^i$  entsprechenden Grössen beim Uebergang von  $y$  auf  $z$  seien  $b_l^k$ . Die Komponenten eines Vektors im  $z$ -Raum seien  $j^l$ . Dann erhalten wir für die einzelnen Transformationen

$$(8) \quad \xi^i = a_k^i \eta^k, \quad \eta^k = b_l^k j^l$$

Daraus folgt

$$(9) \quad \xi^i = a_k^i b_l^k j^l$$

Andererseits folgt für den direkten Uebergang von  $x$  auf  $z$ :

$$(10) \quad \xi^i = c_l^i j^l$$

Wir haben also zu zeigen

$$(11) \quad c_l^i = a_k^i b_l^k$$

Nun ist nach Definition

$$c_l^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^l}, \quad a_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}, \quad b_l^k = \frac{\partial y^k}{\partial z^l}$$

sodass also unsere Behauptung heisst

$$(12) \quad \frac{\partial x^i}{\partial z^l} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial z^l},$$

und das ist nichts weiter als die Kettenregel der Differentiation. Es bilden also in der That unsere Transformationen eine Gruppe.

Man nennt nun aber auch dann ein System von Grössen einen <sup>Vektor</sup> ~~Tensor~~, wenn sie sich anders transformieren. Dann handelt es sich um den kovarianten Vektor.

Denken wir uns eine skalare Funktion  $f$  gegeben. Wir betrachten die Ableitungen dieser Funktion nach allen Koordinaten und setzen



(13)

Wir haben zu untersuchen, wie sich diese Grössen ändern, wenn wir das Koordinatensystem ändern. Es wird offenbar

$$(14) \quad \frac{\partial y_i}{\partial x^k} = \frac{\partial y_i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} = a_i^k f_k$$

Und ein solches Grössensystem  $f^i$  nennen wir einen kovarianten Vektor. Wir definieren also

Man nennt ein System von Grössen  $u_i$  dann einen kovarianten Vektor, wenn es sich beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem transformiert wie die Ableitungen einer skalaren Funktion.

Dann heisst also das Transformationsgesetz für einen kovarianten Vektor

$$(15) \quad v_i = a_i^k u_k$$

Wir bemerken, dass auch in der Reihenfolge der Grössen ein Unterschied zwischen dem kontravarianten und dem kovarianten Vektor vorhanden ist. Beim kontravarianten Vektor stehen links isoliert die alten Grössen und rechts die neuen; beim kovarianten Vektor stehen auf der linken Seite die Grössen im neuen System.

Man nennt zwei Transformationen, die sich so wie die kovariante zur kontravarianten oder umgekehrt verhalten, kontragredient zueinander.

Dass man sich mit derartigen kontragredienten Transformationen beschäftigt, hat einen triftigen Grund. Betrachten wir nämlich das Produkt aus einem kontravarianten mit einem kovarianten Vektor,  $u_i \xi^i$  und fragen danach, was aus diesem Produkt wird, wenn wir zu einem neuen System übergehen, so behaupten wir, dass dieser Ausdruck invariant gegenüber einer Koordinatentransformation ist, dass also gilt

$$(16) \quad u_i \xi^i = v_k \eta^k$$

Da auf beiden Seiten summiert wird, ist es ganz gleichgültig, ob wir den Summationsindex  $i$  oder  $k$  nennen. Die Behauptung der Invarianz wollen wir verifizieren. Zu dem Zwecke schreiben wir (15) um in

$$(17) \quad v_k = a_k^i u_i$$

Setzen wir nun für  $\xi^i$  und  $v_k$  die Werte aus (7) und (17) ein, in (16), so heisst unsere Behauptung

$$(18) \quad u_i a_k^i \xi^k = a_k^i u_i \xi^k$$

und diese Gleichung ist in der Tat richtig.

Diese Tatsache hätten wir auch anders ableiten können. Es ist ja für die Transformation von  $u_i$  das Modell  $\frac{\partial y}{\partial x^i}$ , für  $\xi^i$  ist es  $\frac{dx^i}{dt}$ . Das Produkt dieser beiden Modelle,  $\frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}$ , ist aber nichts Anderes als  $\frac{dy}{dt}$ . Und dieser Ausdruck ist in der Tat invariant gegenüber einer Transformation des Koordinatensystems. Natürlich ist diese letzte Ueberlegung kein Beweis, der allgemeine Gültigkeit hätte, denn wir müssen uns ja freimachen von den Transformationsmodell, und die Kettenregel gilt auch tatsächlich nicht allgemein für Vektoren.

#### §77: Definition und Eigenschaften der Tensoren.

=====

Ein Tensor einer gewissen Stufe ist ein System von Grössen, das sich transformiert wie ein gewisses einfaches Modell. Wir definieren:

Wir nennen ein Grössensystem  $A_{rst...}^{ikl...}$  dann einen Tensor, wenn es sich transformiert wie das Produkt von Vektoren:  $\xi^i \xi^k \xi^l \dots u_r u_s u_t \dots$  !

Aus dieser Definition des Tensors folgt unmittelbar, dass auch er der Gruppeneigenschaft genügt.

Wir wollen uns nun eine Reihe von arithmetischen Eigenschaften der Tensoren verschaffen. Aus der Linearität folgt eine Reihe von Symmetriemöglichkeiten.

Wir behaupten zunächst folgendes Gesetz:

Die Summe zweier Tensoren ist wieder ein Tensor,  
wenn die beiden zu summierenden Tensoren gleiche  
Indizes haben.

Seien  $A_{rst}^{ikl}$  und  $B_{rst}^{ikl}$  zwei <sup>oder</sup> Tensoren. Dann heisst unsere Behauptung, dass

$$(1) \quad C_{rst}^{ikl} = A_{rst}^{ikl} + B_{rst}^{ikl}$$

wieder ein Tensor ist. Das folgt aber aus der Definition des Tensors; denn die beiden Tensoren transformieren sich mit derselben Matrix.

Ferner folgt unmittelbar folgender Satz:

Das Produkt eines Tensors mit einer Zahl ist wieder ein Tensor.

Betrachten wir die beiden Tensoren  $\xi^i \eta^k$  und  $\eta^i \xi^k$ .  
 Dann ist die Summe

$$\xi^i \eta^k + \eta^i \xi^k$$

zunächst wieder ein Tensor, und zwar ein solcher, der sich bei Vertauschung von  $i$  und  $k$  nicht ändert. Wir sehen also, dass wir uns eine gewisse Klasse von Tensoren verschaffen können, die gegenüber einer Vertauschung der Indizes invariant sind, oder die in anderer Weise reagieren. Allgemein ist

$$C_{rst}^{ikl} = A_{rst}^{ikl} + A_{rst}^{kil}$$

ein in  $i$  und  $k$  symmetrischer Tensor; dagegen ist

$$C_{rst}^{ikl} = A_{rst}^{ikl} - A_{rst}^{kil}$$

ein in  $i$  und  $k$  antisymmetrischer Tensor. Er ändert bei der Vertauschung von  $i$  und  $k$  sein Vorzeichen.

Auch kompliziertere Fälle können eintreten. So ist z.B.

$$\xi^i \eta^k \zeta^l + \eta^i \zeta^k \xi^l + \zeta^i \xi^k \eta^l$$

in  $i, k, l$  invariant, ebenso der Tensor

$$A^{ikl} + A^{kli} + A^{lik}$$

Ganz entsprechende Typen kann man natürlich auch für die kovarianten Indizes herleiten.

Da wir nun Geometrie treiben, haben wir an die Spitze unserer Betrachtungen die quadratische Form

$$(2) \quad \frac{ds^2}{dt^2} = g_{ik} \xi^i \xi^k$$

zu stellen. Wir wissen schon, dass die Grösse  $g_{ik}$  symmetrisch ist in  $i$  und  $k$ . Wir behaupten nun, dass  $g_{ik}$  ein Tensor zweiter Stufe in  $i$  und  $k$  ist, und zwar ein in beiden Indizes kovarianter Tensor. Wir wissen, dass der ganze Ausdruck invariant ist gegenüber einer Transformation der Koordinaten. Nennen wir die den  $g_{ik}$  entsprechenden Grössen in einem neuen System  $h_{rs}$ , so muss also gelten

$$(3) \quad g_{ik} \xi^i \xi^k = h_{rs}$$

Daraus haben wir abzuleiten, dass sich die Grösse  $g_{ik}$  in die Grösse  $h_{rs}$  überführen lässt wie das Produkt aus zwei kovarianten Vektoren. Setzen wir die Transformationsformeln für die auf der linken Seite stehenden Grössen  $\xi^i$  und  $\xi^k$  in den linken Ausdruck ein, so erhalten wir

$$(4) \quad g_{ik} a_r^i \eta^r a_s^k \eta^s = (g_{ik} a_r^i a_s^k) \eta^r \eta^s$$

Es wird also

$$(5) \quad h_{rs} = g_{ik} a_r^i a_s^k$$

Wir haben also zu zeigen, dass sich zwei kovariante Vektoren  $v_r$  und  $v_s$  genau so transformieren. Es ist

$$(6) \quad v_r v_s = a_r^i u_i a_s^k u_k = a_i u_k a_r^i a_s^k$$

Wir erkennen also in der Tat, dass  $g_{ik}$  ein Tensor zweiter

Stufe ist. Man nennt ihn den Fundamentaltensor der Riemannschen Geometrie.

§78: Die Ueberschiebung.  
=====

Wir müssen nun noch eine Methode kennenlernen, die der Ueberschiebung. Wir sahen schon, dass  $u_i \xi^i$  eine Invariante ist. Das ist der Sonderfall einer all gemeinen Tatsache. Gegeben seien zwei Tensoren, von denen der eine den Index  $i$  als oberen, der andere als unteren Index trägt:

$$A \begin{matrix} \underbrace{\quad \quad}_{\mu_1} & \underbrace{\quad \quad}_{\mu_2} \\ \dots i \dots \\ \dots \dots \dots \\ \underbrace{\quad \quad}_{\nu} \end{matrix} , \quad B \begin{matrix} \underbrace{\quad \quad}_{\nu} \\ \dots \dots \dots \\ \dots i \dots \\ \underbrace{\quad \quad}_{\tau} \end{matrix}$$

Die Anzahl der ausser  $i$  noch vorhandenen Indizes ist oben angegeben. Wenn wir diese beiden Tensoren multiplizieren, dann wird

$$\begin{aligned} A \dots i \dots B \dots i \dots &= \xi^i \xi^i \dots \xi^i \dots u_i u_i \dots \\ &\dots v_i v_i \dots \\ &= \xi^i v_i \xi^i \dots u_i u_i \dots \dots v_i v_i \dots \\ &= \text{Zahl } C \begin{matrix} \underbrace{\quad \quad}_{\mu_1} & \underbrace{\quad \quad}_{\mu_2} & \underbrace{\quad \quad}_{\nu} \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \underbrace{\quad \quad}_{\nu} \end{matrix} \end{aligned}$$

Z.B. ist

$$C_{rst}^{ik} D_{ik}^p = E_{rst}^p \text{ Inv.}$$

Diese Methode der Ueberschiebung gibt uns die Möglichkeit in die Hand, aus einem Tensor durch Multiplikation mit einem andern einen neuen Tensor zu machen, bei dem die Indizes beliebig anders stehen. Das führt zum Herauf - und Herunterziehen der Indizes.

Gegeben sei der Vektor  $\xi^k$ . Wir wollen ihn in einen kovarianten Vektor verwandeln. Zu dem Zwecke ~~xxxxxx~~ multiplizieren wir ihn mit  $g_{ik}$  und erhalten

$$(1) \quad g_{ik} \xi^k = u_i$$

Ganz allgemein ist

$$(2) \quad \xi_{ik} A^{i \dots k \dots} = B^{i \dots k \dots}$$

Um nun auch ganz entsprechend aus dem kovarianten Vektor einen kontravarianten machen zu können, führen wir einen neuen Tensor  $g^{ik}$  ein, der natürlich ein von  $\xi_{ik}$  völlig verschiedener Tensor sein kann. Wir setzen folgendes fest. Sei  $g$  die Matrix der  $\xi_{ik}$ ,  $G$  die der  $g^{ik}$ ; dann soll gelten

$$(3) \quad g G = e$$

wobei  $e$  die Einheitsmatrix ist. Aus dieser Festsetzung folgt unmittelbar, da  $e$  unabhängig vom Koordinatensystem ist, dass  $g^{ik}$  ein Tensor kontravariant in  $i$  und  $k$  ist.

Mit Hilfe dieses neuen Tensors kann man nun die Indizes heraufziehen. Z.B. ist

$$(4) \quad g^{ik} u_i = \xi^k$$

Damit haben wir also in der Tat ein Mittel, die Indizes ganz beliebig herauf- oder herunterzuziehen.

Man bezeichnet nun Tensoren, die durch solche Operationen auseinander hervorgehen, als assoziiert. Sie sind nicht wesentlich voneinander verschieden. So ist z.B.  $\xi^k$  zu  $u_i$  assoziiert; man nennt daher auch  $u_i$  und  $\xi^k$  die Komponenten desselben Vektors und sagt, dass  $u_i$  die kovariante,  $\xi^k$  die kontravariante Komponente desselben Vektors sind.

Dieser ganze formale Apparat fusst auf dem Begriff der Transformation. Er dient dazu, den Übergang von einem Koordinatensystem zum andern zu regulieren.

### §29: Formale Fassung der Riemannschen Postulate.

Wir haben schon gesagt, dass ein wesentlicher Begriff der Riemannschen Geometrie der der Parallelverschiebung ist. Da haben wir an die Spitze der Postulate die Forderung gestellt, dass Längen und Winkel unverändert sein sollen. Wenn also zwei Vektoren gleich sein sollen, so sollen ihre Längen gleich sein; und wenn zwei Paare von Vektoren gleich sein sollen, so sollen auch ihre Winkel gleich sein. Es ist nun nicht schwer, diese Postulate in Formeln zu fassen. Wir haben bewiesen, dass diese Äquivalenz von Vektoren ganz notwendig eine gewisse Linearität nach sich zieht. Seien  $\xi^i$  die Komponenten eines vorgegebenen Vektors. Wenn wir dann von diesem Vektor zu einem ihm Äquivalenten übergehen, dann soll folgendes der Fall sein: Nehmen wir an, wir seien in der Lage, diesen selben Vektor längs einer ganzen Kurve stetig abzutragen. Dann sind die Komponenten  $\xi^i$  Funktionen des Kurvenparameters  $t$ . Unsere Aufgabe ist es ein Gleichungssystem anzugeben, dem diese Komponenten genügen. Wir haben schon bewiesen, dass aus der Stationarität eine gewisse Linearität folgt, die besagt, dass die Differentialquotienten  $\frac{d\xi^i}{dt}$  sich notwendig linear aus den Komponenten selbst zusammensetzen lassen:

$$(1) \quad \frac{d\xi^i}{dt} = \gamma^i_r \xi^r$$

Nun haben wir das Problem offengelassen, wie die Grösse  $\gamma$  von der Richtung abhängt, in der wir fortschreiten. Wir variieren die Richtung und lassen die Längen konstant. Das haben wir wieder durch ein neues Postulat festzulegen; denn bisher haben wir die Vektoren nur längs einer einzigen Kurve sich bewegen lassen. Wir gehen also dazu über, einen Vektor in einer ganzen Umgebung eines Punktes abzutragen. Das haben wir uns so vorzustellen, dass wir durch den Punkt  $P$  hindurch ein ganzes Bündel von Kurven legen und auf diesen dann

Vektor abtragen. Dann werden die Komponenten ~~von~~  $\xi^i$  in der Umgebung von P Ortsfunktionen werden; wir können sie also nach allen Variablen differenzieren. Dann wird

$$(2) \quad \frac{d\xi^i}{dt} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^c} \frac{dx^c}{dt}.$$

Dann steckt in  $\frac{dx^c}{dt}$  gerade das, was wir suchen, nämlich die Abhängigkeit von der Richtung. Wir setzen

$$(3) \quad \frac{dx^c}{dt} = \eta^c.$$

Nun bestimmt sich der Charakter der Tensoren zum Teil daraus, dass wir verlangen, dass  $\eta^c$  wieder Vektorcharakter haben soll. Wir verlangen also, dass die Abhängigkeit von der Richtung derart ist, dass sie wieder Vektorcharakter hat. Wir setzen

$$(4) \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^c} = \Gamma_{cr}^i \xi^r.$$

Dann steckt in der Grösse  $\Gamma_{cr}^i$ , von der wir vorläufig nicht wissen, was sie ist,  $i$  und  $r$  von dem  $\xi^r$  her, und das  $c$  ist von der Richtung her hereingekommen.

Multiplizieren wir (4) mit (3), so bekommen wir wegen

(2) und (3)

$$(5) \quad \frac{d\xi^i}{dt} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^c} \eta^c = \Gamma_{cr}^i \xi^r \eta^c = \Gamma_{cr}^i \eta^c \xi^r.$$

Daraus ergibt sich

$$(6) \quad \Gamma_{cr}^i = \Gamma_{rc}^i.$$

Damit haben wir die Aufgabe gelöst, die Abhängigkeit der Grösse  $\Gamma_{cr}^i$  von der Richtung zu bestimmen.

Wir haben nun die Forderungen der Invarianz der Länge und die Schliessung des Parallelogrammes an die Grössen  $\eta$  und  $\Gamma$  heranzutragen. Wir behaupten zunächst, dass die Schliessungseigenschaft damit identisch ist, dass die Grösse  $\Gamma_{cr}^i$  in den unteren Indizes symmetrisch ist:



(7)

Um das zu erkennen, haben wir die Schliessungseigenschaft in Formeln zu kleiden. Wir denken uns ein Parallelogramm  $PP^*P_1^*P_1$ . Die Richtung  $PP^*$  wollen wir durch  $d$  die Richtung  $PP_1$  durch  $\delta$  bezeichnen. Dann werden die beiden Geschwindigkeiten  $\frac{dx^i}{dt}$  und  $\frac{\delta x^i}{\delta \tau}$ . Die Koordinaten von  $P^*$  seien  $x^{i*}$ , die von  $P$  seien  $x^i$ ; dann soll für die Richtung  $d$  sein

$$(8) \quad x^{i*} = x^i + \Delta t \left( \frac{dx^i}{dt} + \epsilon_1 \right).$$

Dabei ist  $\epsilon_1$  eine Grösse, die mit  $t \rightarrow 0$  verschwindet. Die Schliessungseigenschaft besagt nun, dass, wenn wir von  $P$  aus mit der Geschwindigkeit  $\frac{dx^i}{dt}$  nach  $P^*$  und von dort mit einer andern Geschwindigkeit nach  $P_1^*$  gehen, dasselbe sich ergeben soll, als wenn wir von  $P$  über  $P_1$  nach  $P_1^*$  gingen mit entsprechenden Geschwindigkeiten.

Wir haben also zunächst aus  $x^{i*}$  uns  $x_1^{i*}$  zu verschaffen. Da gehen wir ganz entsprechend, wie wir in (8) von  $x^i$  ausgingen, jetzt von  $x^{i*}$  aus, aber nun in der Richtung  $\delta$ . Dabei ist die Geschwindigkeit, mit der wir vorzugehen haben, aber nicht  $\frac{\delta x^i}{\delta \tau}$  direkt, sondern transformiert. Sei unsere zu betrachtende Geschwindigkeit  $\left( \frac{\delta x^i}{\delta \tau} \right)^*$ , dann ist nach der Transformationsformel (5)

$$(9) \quad \left( \frac{\delta x^i}{\delta \tau} \right)^* = \Gamma_{er}^i \eta^e \frac{\delta x^e}{\delta \tau} = \Gamma_{er}^i \frac{dx^e}{dt} \frac{\delta x^e}{\delta \tau}.$$

Wir erhalten nun für den Übergang von  $P^*$  nach  $P_1^*$  ganz analog zu (8)

$$(10) \quad x_1^{i*} = x^{i*} + \Delta t \left[ \frac{dx^i}{dt} + \left( \frac{\delta x^i}{\delta \tau} \right)^* + \epsilon_2 \right] \\ = x^{i*} + \Delta t \left[ \frac{dx^i}{dt} + \left[ \Gamma_{er}^i \frac{dx^e}{dt} \frac{\delta x^e}{\delta \tau} + \epsilon_2 \right] \Delta t + \epsilon_2 \right].$$

oder wenn wir für  $x^{i*}$  seinen Wert aus (8) einsetzen

$$(11) \quad x_1^{i*} = x^{i'} + \Delta t \left[ \frac{dx^{i'}}{dt} + \varepsilon_1 + \frac{dx^{i'}}{dt} + \left( \Gamma_{re}^i \frac{dx^e}{dt} \frac{dx^r}{dt} + \varepsilon_2 \right) \Delta t + \varepsilon_2 \right].$$

Nun haben wir also zu untersuchen, was passiert, wenn wir die Bedeutung der Punkte  $P^*$  und  $P_1$  vertauschen. Da haben wir zunächst einmal die Grössen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , die von der Geschwindigkeit des Grenzüberganges auf  $PP^*$  und  $PP_1$  herrühren. Wir können nun voraussetzen, dass wir in beiden Richtungen gleich schnell gehen wollen, dass also  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  wird. Wir schreiben (11) um in

$$(12) \quad x_1^{i*} = x^{i'} + \Delta t \left[ \left( \frac{dx^{i'}}{dt} + \frac{dx^{i'}}{dt} \right) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \left( \Gamma_{re}^i \frac{dx^e}{dt} \frac{dx^r}{dt} + \varepsilon_2 \right) \Delta t \right].$$

Bei der Vertauschung von  $P_1$  und  $P^*$  ändern sich nun die ersten beiden Klammern überhaupt nicht, weil die Summen in sich übergehen. Der letzte Ausdruck ändert sich insofern, als die Indizes  $r$  und  $l$  vertauscht werden. Wenn also der ganze Ausdruck erhalten bleiben soll, so muss also gelten

$$(13) \quad \Gamma_{re}^i = \Gamma_{el}^i.$$

Übrig bleibt dann nur noch das Glied  $\Delta t^2 \varepsilon_2$ . Das geht aber von höherer als zweiter Ordnung gegen Null.

Wir sehen also, dass die Schliessungsforderung bis auf einen Fehler von höherer als zweiter Ordnung mit der Symmetrieforderung von  $\Gamma_{re}^i$  in den unteren Indizes identisch ist.

Gehen wir nun zur Forderung der Konstanz der Länge über. Da müssen wir also fordern, dass, wenn wir einen Vektor parallel verschieben, die Länge des Vektors erhalten bleibt, dass also gilt

$$(14) \quad \varepsilon_{ik} \xi^i \xi^k = \text{inv.}$$

d.h.

$$(15) \quad \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ik} \xi^i \xi^k) = 0$$

Es ist nun

$$(16) \quad \frac{d}{dt}(g_{ik}\xi^i\xi^k) = \frac{dg_{ik}}{dt}\xi^i\xi^k + g_{ik}\frac{d\xi^i}{dt}\xi^k + g_{ik}\xi^i\frac{d\xi^k}{dt}$$

Nun kommen aber in den letzten beiden Termen alle Indizes zweimal vor, es wird also über alle Indizes summiert, wir können sie also paarweise vertauschen und erhalten

$$(17) \quad \frac{d}{dt}(g_{ik}\xi^i\xi^k) = \frac{dg_{ik}}{dt}\xi^i\xi^k + 2g_{ik}\xi^k\frac{d\xi^i}{dt}$$

für irgendeine Kurve mit dem Parameter  $t$ . Wir setzen nun wieder

$$(18) \quad \frac{dx^i}{dt} = \eta^i.$$

Dann wird

$$(19) \quad \frac{dg_{ik}}{dt} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^l}{dt} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \eta^l$$

Es ist nun nach der allgemeinen Transformationsformel

$$(20) \quad \frac{d\xi^i}{dt} = \sqrt{c}^i \eta^r \xi^r.$$

Setzen wir (18) und (19) in (20) ein, so erhalten wir

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_{ik}\xi^i\xi^k) &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \eta^l \xi^i\xi^k + 2g_{ik}\xi^k \sqrt{c}^i \eta^r \xi^r \\ &= \eta^l \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \xi^i\xi^k + 2g_{ik} \sqrt{c}^i \xi^k \xi^r \right] \end{aligned}$$

also wegen (15)

$$(22) \quad \eta^l \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \xi^i\xi^k + 2g_{ik} \sqrt{c}^i \xi^k \xi^r \right] = 0$$

für jeden Vektor  $\eta^l$ . Also muss die Klammer verschwinden:

$$(23) \quad \cancel{\eta^l} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \xi^i\xi^k + 2g_{ik} \sqrt{c}^i \xi^k \xi^r \right] = 0$$

Mittels dieser Gleichung drückt sich also  $\sqrt{c}^i$  durch  $g_{ik}$  und seine erste Ableitung aus.

Wir können nun in dem ersten Term  $i$  und  $r$  vertauschen und erhalten

$$(24) \quad \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^l} \xi^r \xi^k + 2g_{ik} \sqrt{c}^i \xi^k \xi^r = 0$$

oder

$$(25) \quad \xi^r \xi^k \left( \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^1} + 2 g_{ik} \Gamma_{cr}^c \right) = 0$$

Wir erhalten also eine quadratische Form in  $\xi^r \xi^k$ . Da haben wir nun allgemein folgendes: Sei etwa eine verschwindende quadratische Form gegeben:

$$(26) \quad ax^1{}^2 + bx^1x^2 + cx^2x^1 + dx^2{}^2 = 0$$

für alle Werte von  $x$ . Dann können wir daraus schliessen

$$(27) \quad a = 0, \quad d = 0, \quad b + c = 0$$

Wir erhalten also wegen der Symmetrie von  $g_{ik}$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^1} + g_{ik} \Gamma_{cr}^c + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^1} + g_{ir} \Gamma_{ck}^c = 0$$

oder

$$(28) \quad \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^1} + g_{ik} \Gamma_{cr}^c + g_{ir} \Gamma_{ck}^c = 0$$

Dabei ist über  $i$  zu summieren. Die wesentlichen Indizes sind also  $1, k, r$ . Aus dieser Gleichung ist  $\Gamma$  zu berechnen. Zu dem Zwecke setzen wir

$$(29) \quad g_{ik} \Gamma_{cr}^c = \Gamma_{k, cr}$$

Auch für dieses neue Symbol gilt Symmetrie in  $r$  und  $1$ . Dann geht (28) über in

$$(30) \quad \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^1} + \Gamma_{k, cr} + \Gamma_{r, ck} = 0$$

Daraus erhalten wir sofort durch zyklische Vertauschung

$$(31) \quad \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{r1}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^r} \\ = \Gamma_{k, 1r} + \Gamma_{r, ck} - \Gamma_{c, kr} - \Gamma_{r, ck} - \Gamma_{k, cr} - \Gamma_{c, rk} \\ = -2 \Gamma_{c, kr}$$

so dass wir schliesslich haben

$$(32) \quad \Gamma_{c, rk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{rc}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kc}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^c} \right)$$

Damit haben wir in der Tat das Symbol  $\overline{\Gamma}_{i,jk}$  durch die Ableitungen des Fundamentaltensors ausgedrückt. Man nennt die Grössen  $\overline{\Gamma}_{i,jk}$  die Christoffelsymbole.

-----

§80: Die kovariante Ableitung.

=====

Wir haben gesehen, dass die Christoffelsymbole sich auf Grund unserer Annahmen eindeutig aus dem Tensor  $\xi_{ik}$  und seinen Ableitungen bestimmen. Nun sind aber diese Annahmen über die stationäre Uebertragung unabhängig vom Koordinatensystem. Die erste Forderung ist eine solche über Regularitätseigenschaften, die natürlich nichts mit dem gewählten System zu tun hat; die zweite Annahme über die Schließung des Parallelogrammes hat ebensowenig etwas mit dem Koordinatensystem zu tun, und die dritte ist auch unabhängig davon, weil der Ausdruck  $\xi_{ik} \xi^i \xi^k$  invariant ist. Wenn wir also zu einem neuen Koordinatensystem übergehen, so müssen sich die Grössen  $\overline{\Gamma}$  durch die neuen Grössen in derselben Weise ausdrücken lassen wie im alten System. Wir schreiben die Transformationsformeln in der Gestalt

$$(1) \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \overline{\Gamma}_{jk}^i \xi^k = 0$$

Diese Gleichung muss also gegenüber einer Koordinatentransformation invariant sein. Wir werden also erwarten, dass die linke Seite von (1) invariante Bedeutung hat. Natürlich ist diese Betrachtung kein Beweis, sie macht die Tatsache nur plausibel. Es gibt nun auch bei Tensoren Invarianzeigenschaften. Wir wissen ja, dass Tensoren sich linear transformieren. Wenn also sämtliche Komponenten eines Tensors in einem bestimmten Koordinatensystem verschwinden, so müssen sie in jedem System verschwinden. Das ist einer der wesentlichen Gründe, dass man überhaupt Tensoren einführt. Sie sind ja nichts weiter als lineare

Gleichungssysteme. Dann scheint aber die eben eingeführte Eigenschaft der Tensoren sehr speziell, denn auf Verschwinden kann man jede Gleichung zurückführen.

Wenn z.B. die Vektorgleichung  $\xi^i = \eta^i$  komponentenweise gelten soll, so kann man diese Gleichung ja auch in der Gestalt  $\xi^i - \eta^i = 0$  schreiben. Der Vektor  $\xi^i - \eta^i$  verschwindet also in jedem Koordinatensystem. Die Gleichung ist also invariant. Wir werden also auch bei unserer Gleichung (1) vermuten, dass es sich um einen verschwindenden Tensor handelt. Diesen Tensor bezeichnen wir mit  $\xi_1^i$ . Wir setzen also

$$(2) \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^i \xi^j = \xi_c^i$$

Es ist nun leicht zu verifizieren, dass diese durch die Gleichung (2) eingeführte Grösse sich in der Tat wie ein Tensor mit einem oberen und einem Unteren Index verhält.

Wir wollen überlegen, wie dieser Tensor im einfachsten Fall, dem des euklidischen Raumes beschaffen ist. Dann reduziert sich ja  $g_{ik}$  auf die Einheitsmatrix. Wenn nun aber die  $g_{ik}$  konstant sind (und das sind sie dann ja erst recht), dann verschwinden ihre Ableitungen nach den Koordinaten, also verschwinden auch die Grössen  $\xi_c^i$ . In diesem Sonderfalle ist also

$$(3) \quad \xi_1^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^1}$$

Wir sehen also, dass es sich bei dem Tensor  $\xi_1^i$  um eine Verallgemeinerung der Differentiation handelt. Man nennt diese verallgemeinerte Differentiation die kovariante Ableitung nach  $x^1$ . Man nennt sie kovariant, weil es sich um den Grenzfall eines Quotienten handelt, bei dem im Nenner ein kontravarianter Vektor steht.

Wir behaupten nun, dass man durch eine einfache Forderung derartige Prozesse auch für jeden Tensor definieren kann. Und zwar geschieht das ganz zwangsläufig. Wir wollen

es schrittweise machen, wollen zunächst die kovariante Ableitung für einen kovarianten Vektor erklären. Und wir behaupten, dass es nur eine Art der Definition geben kann, wenn man noch eine Forderung erhebt. Sie lautet: Wir gehen aus von einer Invarianten  $u_1 \xi^1$  und denken uns auf einer Kurve  $\xi^1$  und  $u_1$  vorgegeben. Dann wird, wenn diese beiden Vektoren stationär vorgegeben werden, der Ausdruck  $u_1 \xi^1$  entlang der Kurve invariant sein. Nun ist aber klar, wie man das Gesetz der Stationarität zu bilden hat. Man wird verlangen, dass die Determinante entartet ist, dass also die Stationarität so erklärt wird, dass der Ausdruck  $u_1 \xi^1$  stationär als eine konstante Zahl erscheint. Man hat dann die Formel

$$(4) \quad \frac{d(u_1 \xi^1)}{dt} = 0$$

zur Verfügung, und das ist schon die allgemeine Definition der Stationarität. Nun wird man sich denken können, dass, wenn man differenziert, sich zwangsläufig auch für  $u_1$  entsprechende Regeln ergeben; setzen wir

$$(5) \quad \frac{d\xi^1}{dt} = \eta^l,$$

so lässt sich (4) in der Gestalt schreiben

$$(6) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x^l} \eta^l \xi^1 + u_1 \Gamma_{lc}^1 \xi^c \eta^l = 0.$$

Ersetzen wir in dem ersten Term  $l$  durch  $k$ , was wir dürfen, weil es sich um Summationsindizes handelt, so folgt

$$(7) \quad \eta^l \xi^k \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^l} + u_1 \Gamma_{lc}^1 \right) = 0.$$

Wir erhalten also eine quadratische Form in  $\eta$  und  $\xi$ . Und diese Gleichung (7) soll identisch für jedes Produkt  $\eta^l \xi^k$  gelten, es werden also die Komponenten verschwinden müssen. Und das ergibt sie Gleichungen, die man haben will. In derselben Weise macht man es für beliebige Vektoren, z.B. auch für einen Tensor zweiter Stufe. Da können wir ausgehen von der Forderung, dass etwa  $u_{ik} \xi^i \xi^k$  invariant ist,

dass sich aber  $u_{ik} \xi^i$  wie ein kovarianter Vektor verhält.

Es gelten nun über die kovariante Ableitung folgende Sätze:

Wenn man die  $g_{ik}$  nach dem Gesetz, das für zwei ~~zwei~~ ~~zwei~~ Tensoren mit zwei unteren Indizes gilt, behandelt, so zeigt sich, dass die Differentialquotienten sämtlich verschwinden, wenn nach irgendeiner Variablen differenziert wird. Das ist das formale Gesetz. Dann kann man auch sehen, dass beider kovarianten Differentiation dieselben Regeln gelten wie bei der gewöhnlichen Differentiation. Wenn wir etwa das Produkt  $\xi^i \eta^l$  nach  $x^j$  differenzieren wollen, so erhalten wir

$$(8) \quad \frac{d \xi^i \eta^l}{dx^j} = \xi^i{}_{,j} \eta^l + \xi^i \eta^l{}_{,j}.$$

Ferner wird eine Summe differenziert, indem man die Summanden differenziert.

Viel wichtiger ist ein geometrischer Satz, der folgendes besagt: Wir definieren als geodätische Linie die kürzeste Verbindung zweier Punkte, also die Linie, die die Gleichung

$$(9) \quad \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}} dt = \text{Min.}$$

erfüllt. Wenn man sie auffinden will, so hat man zu verlangen, dass der Ausdruck (9) stationär wird. Und da zeigt sich, und das ist ein Satz, den man nicht ohne Rechnung finden kann, dass die geodätischen Linien diejenigen Linien sind, für die der Vektor  $\frac{dx^i}{dt}$  stationär verschoben WIRD, und zwar in sich selbst.

Diesen Satz wollen wir beweisen. Wir erinnern uns an die Formel

$$(10) \quad \frac{d \xi^i}{dt} = \Gamma^i{}_{jk} \xi^j \eta^k,$$

wobei  $\eta^l$  die Richtung angibt, in der  $\xi^i$  verschoben wird. Nun verschieben wir den Vektor  $\xi$  in seiner eigenen Richtung. Dann haben wir also  $\eta$  durch  $\xi$  zu ersetzen und wir erhalten für die autoparallelen Linien



$$(11) \quad \frac{d\xi^i}{dt} = \Gamma_{kl}^i \xi^k \xi^l,$$

und wenn wir unter dem Vektor  $\xi$  wieder die Tangentialkomponente längs einer Kurve verstehen, ergibt sich für die autoparallelen Kurven

$$(12) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt}.$$

Das ist ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die zweiten Ableitungen der Koordinaten sind ausgedrückt durch quadratische Formen in den ersten Ableitungen. Dieses Gleichungssystem gilt nun nicht immer. Es gilt nur dann, wenn  $t$  ein bestimmter Parameter ist, nämlich die Bogenlänge. Dass das System nicht immer gelten kann, ersehen wir an folgendem: Ersetzen wir  $t$  durch  $\tau$ , so tritt der Faktor  $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$  heraus. Es ist ja

$$(13) \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\tau} \tau', \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{dx^i}{d\tau} \tau'' + \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \tau'^2.$$

Es kann also das Gleichungssystem in der Tat also nur für  $t = s$  gelten. Diese Bedingung drückt sich aus in der Formel

$$(14) \quad \xi_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 1$$

Das ist eine Normierungsgleichung für  $t$ . Wenn sie erfüllt ist, dann gilt das Gleichungssystem (12) für die geodätischen Linien. Wir erhalten also den wesentlichen Satz:

Die autoparallelen Linien sind die geodätischen Linien.

Dabei ist folgendes zu beachten: Wenn wir nicht von dem Problem, die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten zu finden ausgehen, sondern wenn wir nach stationären Linien fragen, dann wird diese Forderung abgeschwächt. Und wir sind ja in der Tat nur von der Stationarität ausgegangen. Die Frage, ob die geodätischen Linien die kürzesten Entfernungen darstellen, ist zu bejahen, aber nur für kleine Gebiete.

Nachdem wir die kovariante Ableitung rein formal erklärt haben, wollen wir uns ihre geometrische Bedeutung klarmachen. Wenn das Gleichungssystem (12) gilt, so soll es ein Vektorfeld um einen Punkt herum stationär erklären. Nun braucht aber ein beliebiges Vektorfeld nicht stationär zu sein. Dann wird man unter der Änderung des Vektorfeldes den Ausdruck

$$(15) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}$$

verstehen.

### §81: Der Riemannsche Krümmungstensor.

=====

Wir haben nun nur noch einen Schritt zu machen, um die wirklichen Krümmungsverhältnisse in Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu kennzeichnen. Da gehen wir von folgender Fragestellung aus:

Wir betrachten die Änderung  $(u_i)'$  eines Tensors  $u_i$ . Diese integrieren wir über einen geschlossenen Weg. Dann bekommen wir den Ausdruck

$$(1) \quad \oint (u_i)' dt.$$

Wenn die  $u_i$  Ortsfunktionen wären, würde das Integral verschwinden. Sie sind es aber nicht; denn die Änderung ist mit einer Richtung gekoppelt. Es ergibt sich also die Frage, unter welchen Umständen dieses Integral verschwindet. Es wird also nach einer Integrationsbedingung gefragt. Wir suchen also eine Lösung der Gleichung

$$(2) \quad \oint \frac{\partial u_i}{\partial x^\mu} dx^\mu = 0.$$

In zwei Dimensionen kennen wir die Antwort schon. Da muss die Bedingung

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^\nu \partial x^\mu},$$

erfüllt sein. Jetzt haben wir aber keine gewöhnliche Ableitung mehr, sondern kovariante Ableitung. Und wieder

zeigt es sich, dass diese Bedingung (3) hinreichend und notwendig ist. Es wird sich also darum handeln, die Differenz

$$(4) \quad ((u_i)_k)_l = ((u_i)_l)_k$$

ins Auge zu fassen und zu untersuchen, wie sie auf das Verschwinden des Integrales (1) einwirkt. Wir haben für die kovariante Ableitung gefunden

$$(5) \quad (u_i)_e = \frac{\partial u_i}{\partial x^e} + \Gamma_{ie}^r u_r.$$

Daraus erhalten wir

$$(6) \quad ((u_i)_e)_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^e} + \Gamma_{ie}^r u_r \right) + \Gamma_{rk}^s \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^e} + \Gamma_{ie}^r u_r \right) + \Gamma_{ek}^s \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^s} + \Gamma_{is}^r u_r \right).$$

Wenn wir nun  $k$  und  $l$  vertauschen, dann sehen wir sofort, dass sich die gemischten Ableitungen, die bei der Differentiation des ersten Terms auftreten, fortheben. Es bleibt also eine gewisse Summe übrig:

$$(7) \quad ((u_i)_k)_l - ((u_i)_l)_k = B_{ikl}^e u_e$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist jedenfalls ein Tensor in den drei unteren Indizes, er lässt sich als Summe über einen ganz beliebigen kovarianten Vektor schreiben, multipliziert mit einem Ausdruck  $B$ , der nicht von  $u$  abhängt, sondern nur von den  $g$  und  $\Gamma$ . Daraus kann man schliessen, dass  $B_{ikl}^e$  ein Tensor ist mit einem oberen und drei unteren Indizes. Man nennt ihn den Riemannschen Krümmungstensor.

Wir sehen also, dass das Verschwinden des Riemannschen Krümmungstensors damit gleichwertig ist, dass das Integral (1) über eine geschlossene Kurve verschwindet. Es ist also das Verschwinden des Riemannschen Krümmungstensors die Integrabilitätsbedingung für Stabilitätsfortsetzung. Und es zeigt sich, dass man nicht nur einen kovarianten, sondern auch einen kontravarianten Tensor auf diese Weise behandeln kann. Der Tensor  $B$  erweist sich als die Verall-

gemeinerung der Zahl, die wir in der Flächentheorie das Gaussische Krümmungsmass genannt haben. Das kann man sich so klar machen:

Wir haben auch das Gaussische Krümmungsmass invariant charakterisieren können. Es galt ja die Formel

$$(8) \quad \oint \frac{1}{R} ds = \iint K d\sigma;$$

wir behaupten, dass das Integral auf der linken Seite von demselben Typus ist wie das Integral (1). Es war definiert als Integral über einen kleinen Winkel  $\alpha$ . Und diese Winkel  $\alpha$  ergaben sich gerade als kovariante Ableitung des Tangentenvektors. Es steht also auch in (8) nichts anderes als die kovariante Änderung eines Vektors längs einer geschlossenen Kurve,

Es befremdet zunächst, dass man von einer Zahl zu einem Tensor kommen soll. Das hängt aber so zusammen: In mehr als zwei Dimensionen kann man durch einen Punkt beliebig viel Flächen legen. Man kann also auch in Riemannschen Räumen von Flächen reden und einen Algorithmus einführen, der dem der gewöhnlichen Flächentheorie entspricht. Da zeigt es sich, dass sich die Gaussische Krümmung auf den Tensor  $B$ , multipliziert mit gewissen Grössen, überträgt. Von diesem Tensor  $B$  wollen wir zweierlei angeben. Einmal haben wir schon erwähnt, dass das Verschwinden dieses Tensors die Möglichkeit gibt, ein stationäres Vektorfeld einzuführen. Wir behaupten, dass damit äquivalent ist, dass wir den Riemannschen Raum in ein Stück des euklidischen Raumes längentreu abbilden kann, d. h. dass es möglich ist, Koordinaten einzuführen, in denen das Linienelement schlechthin die Gestalt

$$(9) \quad ds^2 = \sum x_i^2$$

bekommt. Wir betrachten nun irgendeinen Punkt des Raumes und ein System von orthogonalen Einheitsvektoren.

Dieses Vektorsystem setzen wir stationär in den Raum fort. Dann wird jedem Punkte ein System orthogonaler Einheitsvektoren zugeordnet. Und diese Systeme haben die Eigenschaft, dass sie überall gleich sind. Uns interessiert das Richtungsfeld, dass durch diese Vektoren bestimmt wird. Wir benutzen die Integralkurven mit den Flächen, die sie aufspannen, zur Einführung eines neuen Koordinatensystems. Dann wissen wir, dass die Gleichung der geodätischen Linie und die des Parallelismus invariant gegen eine Koordinatentransformation sind. Unser neues System hat aber die Eigenschaft der Stationarität gegenüber dem alten. Das läuft darauf hinaus, dass die  $\Gamma$  sämtlich verschwinden müssen. Nun wissen wir aber, dass die  $\Gamma$  sich durch die  $\xi_{ik}$  und ihre Ableitungen ausdrücken lassen. Es müssen also die  $\xi_{ik}$  konstant sein. Da nun ausserdem in jedem Punkte Orthogonalvektoren vorliegen, ergibt sich zwangsläufig, dass  $\xi_{ik}$  die Einheitsmatrix bildet, d.h. wir haben den euklidischen Fall vor uns. Es geben also die Tensoren  $B$  die Abweichung des Riemannschen Raumes vom euklidischen Raume.

Wenn die  $B$  nicht verschwinden, werden wir doch ein analoges zu den Flächen konstanter Gaussischer Krümmung suchen. Wir werden also fragen, ob es Flächen im Riemannschen Raume gibt, die eine Abbildung auf sich selbst gestatten. Diese Frage ist äquivalent mit der, dass der Riemannsche Krümmungstensor an allen Stellen des Raumes äquivalentes Verhalten zeigt, also einen speziellen Transformationscharakter hat. Derartige Räume nennt man dann auch Räume konstanter Riemannscher Krümmung.

### §82: Riemannsche Normalkoordinaten.

Eine weitere Konsequenz, die auch von Riemann herrührt, sind die Normalkoordinaten. Um sie einzuführen, gehen wir von einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit aus, von der Gesamtheit der geodätischen Linien, und führen

in einem Punkte ein Koordinatensystem ein. Wir gehen nun in zwei Schritten vor. Der erste besteht darin, dass wir die Richtungen, die durch den Punkt hindurchgehen, nach dem Schema der euklidischen Geometrie einführen, also durch Polarkoordinaten. Wir führen auch den euklidischen Radiusvektor ein. Dadurch wird um jeden Punkt ein Koordinatensystem eingeführt durch Richtung und Abstand von einem Nachbarpunkte.

Der zweite Schritt ist folgender: Wir transformieren diese Koordinaten auf rechtwinklige Koordinaten nach dem Formelschema, das man auch im euklidischen Raum hat. Dieses Transformationssystem ist von nicht verschwindender Determinante. Dann erhalten wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, die Riemannschen Normalkoordinaten. Nach diesen Betrachtungen ist es plausibel - man muss es aber beweisen - dass diese Riemannschen Normalkoordinaten besonders viel Ähnlichkeit mit den kartesischen besitzen.

Natürlich kann man erreichen, dass die  $\xi_{ik}$  in einem Punkte  $P$  selbst zur Einheitsmatrix werden; sie transformieren sich ja nach dem Gesetz

$$h_{rs} = a_k^i \xi_{ik} a_s^k$$

Dann kann man noch verlangen, dass die  $\xi_{ik}$  stationär sind. Das läuft darauf hinaus, dass die  $\sqrt{\quad}$  verschwinden, denn sie sind durch die Ableitungen der  $\xi_{ik}$  erklärt. Verschwinden der  $\sqrt{\quad}$  bedeutet aber, dass sich die Gleichung der geodätischen Linie in der Gestalt

$$x'' = 0$$

schreibt. Nun ist es plausibel, da wir von einer geodätischen Linie ausgegangen sind, dass in diesen Punkten gerade die Ableitungen nach  $t$  verschwinden müssen. Die Riemannschen Normalkoordinaten haben also die Eigenschaft, dass einmal die  $\xi_{IK}$  zur Einheitsmatrix werden

und dass andermal die  $\xi_{ik}$  stationär sind.

Sie sind also dazu geeignet, die metrischen Verhältnisse auf einer Fläche zu kennzeichnen. Sie setzen uns instand, einen Satz anzudeuten.

Wir haben ohne Beweis gesagt, dass die Parallelverschiebung mit den geodätischen Linien zusammenhängt; wir haben gesehen, dass die geodätischen Linien die autparallelen Linien sind. Ferner haben wir gesagt: Wenn wir eine beliebige Richtung in eine andere verschieben wollen, so können wir das einmal mit Hilfe der geodätischen Linie, dann aber auch mit der der geodätischen Fläche, die von der geodätischen Linie und den Vektoren  $\xi$  aufgespannt wird. Dann haben wir  $\xi$  dann parallel verschoben genannt, wenn dieser Vektor einmal in der geodätischen Fläche seiner Anfangslage bleibt, und wenn er mit der geodätischen Linie immer denselben Winkel einschliesst. Stationäre Verschiebung eines Vektors in sich kann also nur auf der geodätischen Linie geschehen. Es ergibt sich also die Gleichheit der Winkel sofort aus der Stationarität. Was sich aber nicht sofort ergibt, ist, dass der Nachbarvektor auch in der geodätischen Fläche liegen muss. Und diese Tatsache kann man mit Hilfe dieser Riemannschen Normalkoordinaten beweisen. Der Beweis ist zuerst von Severi erbracht worden.

=====

Schlussbetrachtung: Zusammenhänge der  
 =====  
Riemannschen Geometrie mit der modernen Physik.  
 =====

Uns bleibt nun noch übrig, ein paar Worte über den Zusammenhang der Riemannschen Geometrie mit der Physik zu sagen. Diese Zusammenhänge sind zweierlei Art. Einmal kann man den Phasenraum heranziehen, dann aber müssen wir die Relativitätstheorie erwähnen.

1.) Phasenraum.

Wir betrachten unter Zugrundelegung der klassischen Physik ein mechanisches System, das endlich viele Freiheitsgrade besitzt. Dann heisst das, dass wir den Ort jedes Systems eindeutig festlegen können durch Angabe der Werte von  $n$  Variablen  $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ . Dann wird die Zustandsänderung des Systems gegeben durch den Differentialquotienten nach der Zeit  $t$ . Die kinetische Energie ist zunächst

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\xi}^i{}^2,$$

wobei die  $\xi^i$  die gewöhnlichen Raumkoordinaten darstellen. Wenn wir nun ein System von Massenpunkten betrachten, so wird jeder Punkt diese Energie haben. Insgesamt erhalten wir also

$$E = \frac{1}{2} \sum m \left( \sum \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \dot{x}^i \right)^2$$

Es liegt also nahe, einen Riemannschen Raum zu betrachten, der diese Koordinaten hat und in dem das Linienelement in dieser Form gegeben ist. Da ergibt sich tatsächlich, wenn man die Mechanik durch Variationsprinzipien vorschreibt, dass diese sich als Gleichungen der geodätischen Linien im Riemannschen Raum oder Phasenraum schreiben lassen. Es gibt also die Riemannsche Metrik im Phasenraum die wirklichen Verhältnisse wieder.

2.) Relativitätstheorie.

In der Relativitätstheorie tritt eine neue Komplikation auf. Man nimmt dort die Zeit als vierte Koordinate zu den Koordinaten hinzu und postuliert, dass sie sich mittransformiert. Es ergibt sich aus den Lichtbahnen, dass man eine Transformation der Gestalt

$$ds^2 = \sum dx^i{}^2 - dt^2$$

ansetzen muss. Eine gewisse Schwierigkeit macht dann die



16883

Forderung der Definitivität.

Wir haben früher schon den Begriff der asymptotischen Richtungen eingeführt; das waren die Richtungen, in denen das Linienelement verschwindet. In unserer Theorie damals waren es komplexe Richtungen, jetzt werden sie reell. Sie beschreiben einen reellen Kegel. Er entspricht den Lichtstrahlen im vi-dimensionalen Raum. Er hat ein Inneres und ein Aeußeres. Diese Unterscheidung gilt ja für alle Dimensionen. Jede reelle Transformation des ganzen Raumes führt diesen Kegel in einen anderen über. Er teilt also alle Transformationen in zwei Klassen. Sie sind unzerstörbar durch reelle Transformationen. Man nennt diese beiden Klassen die zeitartige und die lichtartige. Die Grundannahme der Relativitätstheorie ist die, dass jeder Vorgang einer zeitartigen Richtung und jeder Punkt einer raumartigen Richtung entspricht.

\*\*\*\*\*